DIE EINEM HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM ZUGEORDNETEN SYSTEME.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE EINER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER GROSSH. BADISCHEN

ALBERT-LUDWIG-UNIVERSITÄT

ZU FREIBURG IM BREISGAU

VORGELEGT VON

CHRISTIAN PFISTNER

AUS SULZBACH, OBERAMT BACKNANG.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1910.

FRAU GERTRUDE HAEHNEL

GEWIDMET

Vorwort.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Loewy.

Ihr Zweck ist folgender: Man kann einer einzigen linearen homogenen Differentialgleichung andere zuordnen, deren Integrale zu der vorgelegten in einfacher Beziehung stehen. Man denke z. B. an die adjungierten und assoziierten Differentialgleichungen. Was hierüber in der Literatur bekannt ist, findet sich bei Herrn L. Schlesinger, Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung 1909, S. 52 ff.). In derselben Weise kann man auch einem Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen andere Systeme zuordnen; hierüber liegen, soweit mir bekannt ist, nur Untersuchungen von Herrn Schlesinger vor (Crelle J. f. r. u. ang. Math. Bd. 128, S. 295). Wie sich diese Untersuchungen verallgemeinern lassen, soll besonders anschließend an die Veröffentlichung von Herrn A. Loewy in den Transactions of the American math. Soc. **5**, 61 gezeigt werden. Es wird sich im folgenden darum handeln, einige einem System linearer homogener Differentialgleichungen zugeordnete Systeme wirklich anzugeben, worauf ich dann im Schlußparagraphen einige allgemeine Sätze über den Zusammenhang dieser Systeme entwickeln werde.

Für seinen bewährten Rat, mit dem mich Herr Professor Loewy bei meiner Arbeit unterstützte, möchte ich ihn an dieser Stelle nochmals meines aufrichtigsten Dankes versichern.

---

§ 1.

Über Differentialgleichungssysteme, die man einem Systeme zuordnen kann, und Formulierung der zu lösenden Aufgabe.

Es sei gegeben eine Matrix

$$(a_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

deren n^2 Elemente in einem gewissen Gebiete $p \leqq x \leqq r$ eindeutige, stetige, mehrmals differentiierbare Funktionen der Variabeln x sind;

$$(y_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

bedeute ferner eine Matrix von n^2 Elementen, für welche die Determinante $|y_{i\varkappa}| \neq 0$ ist, und die das System

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

linearer homogener Differentialgleichungen befriedigt. Alsdann heißt $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Systems (A).

Es seien zunächst einige Symbole angeführt, deren wir uns im folgenden bedienen. Es soll allgemein ein System von n^2 Elementen

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

abgekürzt mit $(t_{i\varkappa})$ bezeichnet, d. h. durch das Glied der $i$ten Zeile und $\varkappa$ten Kolonne charakterisiert werden. Ferner sei unter $\frac{d^r(v_{i\varkappa})}{dx^r}$ die Matrix $\left(\frac{d^r v_{i\varkappa}}{dx^r}\right)$ verstanden und, wenn C eine Konstante bedeutet, soll

$$C(v_{i\varkappa}) = (C \cdot v_{i\varkappa})$$

sein. Schließlich möge die Inverse der Matrix $(y_{i\varkappa})$ mit $(y_{i\varkappa})^{-1}$, die Transponierte mit $(y_{i\varkappa})'$ bezeichnet werden.

Wir beweisen nunmehr folgenden Satz, der in ähnlicher Fassung zuerst von Herrn Appell[1]) aufgestellt wurde:

I. Hat man eine rationale Funktion der Elemente der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ *des Systems* (A) *und ihrer Abgeleiteten (bis zur m-ten), die ihre Form nicht ändert, wenn man ihre Elemente durch die eines anderen Fundamentalsystems von* (A) *ersetzt, so ist dieselbe eine rationale Funktion der Koeffizienten* $a_{i\varkappa}$ *und ihrer Abgeleiteten (bis zur* $(m-1)$*-ten).*

Es ist zunächst unmittelbar klar, daß die $n!$ Systeme, die man durch Vertauschung der Zeilen in $(y_{i\varkappa})$ erhält, wiederum Fundamentalsysteme des Differentialsystems (A) sind.

Bei einer solchen Transformation bleibt aber eine derartige rationale Funktion R, wie sie unser Satz verlangt, ungeändert, was zur Folge hat, daß die Derivierten der Elemente, die in ein und derselben Kolonne der Matrix $(y_{i\varkappa})$ stehen, bis zu derselben Ordnung vorkommen müssen. Mithin ist R eine Funktion der Argumente

$$\left\{\begin{array}{l} y_{11}, y_{21}, \cdots y_{n1};\ \dfrac{dy_{11}}{dx}, \dfrac{dy_{21}}{dx}, \cdots \dfrac{dy_{n1}}{dx}; \cdots;\ \dfrac{d^{p_1}y_{11}}{dx^{p_1}}, \cdots \dfrac{d^{p_1}y_{n1}}{dx^{p_1}} \\ y_{12}, y_{22}, \cdots y_{n2};\ \dfrac{dy_{12}}{dx}, \dfrac{dy_{22}}{dx}, \cdots \dfrac{dy_{n2}}{dx}; \cdots;\ \dfrac{d^{p_2}y_{12}}{dx^{p_2}}, \cdots \dfrac{d^{p_2}y_{n2}}{dx^{p_2}} \\ \cdot \\ y_{1n}, y_{2n}, \cdots y_{nn};\ \dfrac{dy_{1n}}{dx}, \dfrac{dy_{2n}}{dx}, \cdots \dfrac{dy_{nn}}{dx}; \cdots;\ \dfrac{d^{p_n}y_{1n}}{dx^{p_n}}, \cdots \dfrac{d^{p_n}y_{nn}}{dx^{p_n}}. \end{array}\right.$$

Durch wiederholte Differentiation der Gleichung (A) ersehen wir aber ohne weiteres, daß sich die m-ten Ableitungen der Elemente $y_{i\varkappa}$ als rationale Funktionen der Elemente selbst und der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ nebst deren Abgeleiteten bis zur $(m-1)$-ten darstellen lassen. Vermittels des Systems (A) können wir mithin die rationale Funktion R in eine solche R' verwandeln, in der sämtliche Derivierten der $y_{i\varkappa}$ eliminiert sind, die also die Form hat:

$$R'\left(y_{11}, y_{21}, \cdots y_{nn}; a_{11}, \cdots a_{nn}; \frac{da_{11}}{dx}, \cdots \frac{da_{nn}}{dx}; \cdots; \frac{d^{p_i-1}a_{11}}{dx^{p_i-1}} \cdots \frac{d^{p_i-1}a_{nn}}{dx^{p_i-1}}\right),$$

worin p_i die höchste in R vorkommende Derivierte bedeutet.

Hat man nun die Funktion R derartig transformiert, daß sie keine Abgeleiteten der $y_{i\varkappa}$ mehr enthält, so hängt dieselbe, wie wir zeigen wollen, überhaupt nicht mehr von den Größen $y_{i\varkappa}$ ab. Um dies nach-

---

1) Appell, Annales de l'école normale, série II, vol. 10, p. 400.

zuweisen, bedenke man, daß das allgemeinste Lösungssystem von (A) mit den Elementen $Y_{i\varkappa}$ erhalten wird, indem man die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ mit einer konstanten Matrix $(c_{i\varkappa})$ links komponiert; es ist also

$$(Y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$$

oder

$$(1) \qquad \begin{cases} Y_{i1} = c_{i1}y_{11} + c_{i2}y_{21} + \cdots + c_{in}y_{n1} \\ Y_{i2} = c_{i1}y_{12} + c_{i2}y_{22} + \cdots + c_{in}y_{n2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_{in} = c_{i1}y_{1n} + c_{i2}y_{2n} + \cdots + c_{in}y_{nn}. \end{cases} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

Da die $y_{i\varkappa}$ ein Fundamentalsystem bilden und mithin ihre Determinante nicht verschwindet, so kann man, wenn die $Y_{i\varkappa}$ beliebig vorgegeben sind, Werte $c_{i\varkappa}$ aus dem System (1) linearer Gleichungen eindeutig bestimmen. Betrachtet man also die Funktion R' an einer regulären Stelle x, so muß sie daselbst einen wohl definierten Wert besitzen während sich aus dem Obigen ergibt, daß sie jeden beliebigen Wert annehmen könnte. Es hängt daher R' überhaupt nicht von den $y_{i\varkappa}$ ab womit der Beweis für die Richtigkeit unseres Satzes erbracht ist.

Vermittels dieses Satzes beweisen wir jetzt den folgenden:

II. Hat man eine Matrix

$$F_{i\varkappa} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1\mu} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{\mu 1} & F_{\mu 2} & \cdots & F_{\mu\mu} \end{pmatrix},$$

deren μ^2 Elemente $F_{i\varkappa}$ rationale Funktionen der $y_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind, und die die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

1. *Die Determinante der $F_{i\varkappa}$ verschwindet nicht,*
2. *bei jeder linearen homogenen Transformation der $y_{i\varkappa}$ mit konstanten Koeffizienten von nicht verschwindender Determinante transformiere sich die Matrix ebenfalls linear und homogen mit konstanten Koeffizienten und zwar derartig, daß ihre Determinante $\neq 0$ ist,*

alsdann befriedigen die Elemente der Matrix $F_{i\varkappa}$ ein Differentialsystem, dessen Koeffizientenmatrix $(b_{i\varkappa})$ Elemente besitzt, die rationale Funktionen der $a_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind.

Nach Voraussetzung soll also die Matrix $F_{i\varkappa}$ bei einer linearen homogenen Transformation mit konstanten Koeffizienten der $y_{i\varkappa}$ sich ebenfalls linear und homogen transformieren, d. h. wenn $(y_{i\varkappa})$ übergeht in $(Y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$, gehe $F_{i\varkappa}$ über in eine neue Matrix $(\Phi_{i\varkappa}) = (d_{i\varkappa})(F_{i\varkappa})$, wobei die Größen $d_{i\varkappa}$ Konstanten mit nicht verschwindender Determinante sind; da voraussetzungsgemäß $|F_{i\varkappa}| \neq 0$ ist, so ist auch die De-

terminante $|\Phi_{i\varkappa}|$ von Null verschieden. Wir wollen jetzt, da wir nach dem eben Gesagten die Inverse der Matrix $\Phi_{i\varkappa}$ bilden können, den Ausdruck $(\Phi_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{d\Phi_{i\varkappa}}{dx}\right)$ näher betrachten. Es wird nämlich:

$$(\Phi_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{d\Phi_{i\varkappa}}{dx}\right) = (F_{i\varkappa})^{-1}(d_{i\varkappa})^{-1}(d_{i\varkappa})\left(\frac{dF_{i\varkappa}}{dx}\right) = (F_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dF_{i\varkappa}}{dx}\right).$$

Die Matrix $(F_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dF_{i\varkappa}}{dx}\right)$ ändert sich also bei der Transformation $(Y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$ nicht; ihre Elemente $b_{i\varkappa}$, die gemäß ihrer Bildung rationale Funktionen der $y_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind, hängen mithin nach dem Satze I überhaupt nicht von diesen Größen ab, sondern lassen sich als rationale Funktionen der $a_{i\varkappa}$ und ihrer Derivierten darstellen. Es genügen daher die Größen $F_{i\varkappa}$ einem Differentialgleichungssystem

(B) $$\left(\frac{dF_{i\varkappa}}{dx}\right) = (F_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}),$$

wobei also die $b_{i\varkappa}$ rationale Funktionen der $a_{i\varkappa}$ und ihrer Derivierten sind.

Wir stellen uns im folgenden die Aufgabe, einige solcher zugeordneter Systeme $F_{i\varkappa}$, bei welchen die Elemente $b_{i\varkappa}$ der Koeffizientenmatrix in dieser einfachen Beziehung zu den Elementen $a_{i\varkappa}$ des Systems (A) *stehen, anzugeben und die gegenseitige Zuordnung klarzulegen.*

§ 2.

Der Differentiation entsprechende Differentialgleichungssysteme.

Es soll in diesem Paragraphen dem Systeme

(A) $$\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

ein Differentialsystem

(B) $$\left(\frac{dz_{i\varkappa}}{dx}\right) = (z_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})$$

zugeordnet werden, bei dem die Elemente $z_{i\varkappa}$ der Integralmatrix von (B) durch einfache Differentiation aus den Elementen der Integralmatrix (A) hervorgehen. Es soll mithin $(z_{i\varkappa})$ von der Form sein:

(1) $$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}) = \begin{pmatrix} y_{11}^{(k_1)} & y_{12}^{(k_2)} & \dots & y_{1n}^{(k_n)} \\ y_{21}^{(k_1)} & y_{22}^{(k_2)} & \dots & y_{2n}^{(k_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}^{(k_1)} & y_{n2}^{(k_2)} & \dots & y_{nn}^{(k_n)} \end{pmatrix},$$

woraus man unmittelbar das Bildungsgesetz ersieht, demzufolge die Matrix $(z_{i\varkappa})$ in jeder einzelnen Kolonne durchgehend dieselbe Abgeleitete enthält.

Es ergibt sich dann für eine solche Integralmatrix (B), daß sie die zweite in § 1, II geforderte Eigenschaft besitzt. Denn besteht die Gleichung

(2) $$Y_{i\varkappa} = c_{i1}y_{1\varkappa} + c_{i2}y_{2\varkappa} + \cdots + c_{in}y_{n\varkappa}, \quad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

wo die c_{i1}, c_{i2}, ... c_{in} konstante Größen bedeuten, so ergibt sich durch $k_\varkappa$-malige Differentiation von (2) nach x

(2a) $$Y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)} = c_{i1}y_{1\varkappa}^{(k_\varkappa)} + c_{i2}y_{2\varkappa}^{(k_\varkappa)} + \cdots + c_{in}y_{n\varkappa}^{(k_\varkappa)}$$

(wobei $k_\varkappa$ eine ganze positive Zahl ist).

Man erkennt daraus, daß sich die $y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}$ ebenso transformieren, wie die $y_{i\varkappa}$ selbst, oder daß

(2b) $$(Y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}).$$

Die erste Bedingung des § 1, II dagegen ist nicht eine unmittelbare Folge der Voraussetzung $|y_{i\varkappa}| \neq 0$, wie die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

zeigt, die als System $\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$ geschrieben werden kann, wo $(a_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Dabei ist $(y_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ die Integralmatrix; mithin wird, wenn man in (1) $k_1 = k_2 = 1$ wählt

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}) = \begin{pmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)} & y_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und folglich ist

$$|z_{i\varkappa}| = 0.$$

Führt man jetzt die Voraussetzung ein, daß die Determinante $|z_{i\varkappa}| \neq 0$ ist, so hat man ein System $F_{i\varkappa}$ des § 1; mithin sind die Elemente $b_{i\varkappa}$ des Systems (B) rationale Funktionen der Elemente $a_{i\varkappa}$ und ihrer Derivierten.

Um die Größen $b_{i\varkappa}$ in dem hier vorliegenden Falle als Funktionen der $a_{i\varkappa}$ darzustellen, greifen wir auf Gleichung (1) zurück. Ersetzt man nämlich in derselben die Derivierten der $y_{i\varkappa}$ nach der Gleichung (A), so drückt sich eine Größe $y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}$ in der Form

(1a) $$z_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}\varphi_{\lambda\varkappa}^{(k_\varkappa)}$$

aus, und es wird mithin die Matrix

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}),$$

worin die Elemente der Matrix $(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})$ bloße Funktionen der $a_{i\varkappa}$ und ihrer Derivierten sind. Bezeichnet man mit Herrn Schlesinger[1]) die durch das Symbol $(z_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{d z_{i\varkappa}}{d x}\right)$ definierte Operation kurz mit $D_x(z_{i\varkappa})$, so ergibt sich der Zusammenhang der Matrix $(b_{i\varkappa})$ mit der Matrix $(a_{i\varkappa})$ in folgender Weise:

$$(b_{i\varkappa}) = D_x(z_{i\varkappa}) = D_x[(y_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})] = (\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})^{-1} D_x(y_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)}) + D_x(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})$$

oder da nach (A)

$$D_x(y_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})$$

ist,

$$(\mathrm{B}') \qquad \boldsymbol{(b_{i\varkappa}) = (\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})^{-1}(a_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)}) + D_x(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})}.$$

Wir ersehen zunächst aus Gleichung (B′), daß durch Bestimmung der Elemente der Matrix $(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})$ die Elemente $b_{i\varkappa}$ explizit durch die $a_{i\varkappa}$ und ihre Abgeleiteten ausgedrückt sind; ferner aus Gleichung (1a), daß die eingeführte Bedingung $|z_{i\varkappa}| \neq 0$ die Bedingung

$$|\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)}| \neq 0$$

erfordert, da

$$|z_{i\varkappa}| = |y_{i\varkappa}|\,|\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)}| \quad \text{und} \quad |y_{i\varkappa}| \neq 0 \text{ ist.}$$

Aus dem Systeme (1a)

$$(y_{i\varkappa}^{(k\varkappa)}) = (y_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(k\varkappa)})$$

folgt aber, wenn wir im folgenden der Symmetrie halber unter den 0-ten Abgeleiteten die Elemente selbst und unter dem Symbol $\binom{0}{0}$ die Zahl 1 verstehen, da

$$(y_{i\varkappa}^{(0)}) = (y_{i\varkappa})(\delta_{i\varkappa}),$$

wo $\delta_{i\varkappa}$ das Kroneckersche Symbol bedeutet, daß $(\varphi_{i\varkappa}^{(0)}) = (\delta_{i\varkappa})$ ist.

Weiterhin folgt, da

$$(\mathrm{A}) \qquad (y_{i\varkappa}^{(1)}) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

ist, daß

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(1)}) = \left\{\binom{0}{0}(a_{i\varkappa}^{(0)})\right\}.$$

Die Differentiation von (A) ergibt

$$(y_{i\varkappa}^{(2)}) = (y_{i\varkappa}^{(1)})(a_{i\varkappa}^{(0)}) + (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}^{(1)})$$

---

1) Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen S. 26ff. Leipzig 1908.

oder mit Hilfe von (A) und unter Weglassung der Matrix $(y_{i\varkappa})$

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(2)}) = \{ \tbinom{1}{0} \tbinom{0}{0} (a_{i\varkappa}^{(0)})^2 + \tbinom{1}{1} (a_{i\varkappa}^{(1)}) \} \, {}^{1)};$$

desgleichen durch zweimalige Differentiation des Systems (A)

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(3)}) = \{ \tbinom{2}{0} \tbinom{1}{0} \tbinom{0}{0} (a_{i\varkappa}^{(0)})^3 + \tbinom{2}{0} \tbinom{1}{1} (a_{i\varkappa}^{(1)}) (a_{i\varkappa}^{(0)}) + \tbinom{2}{1} \tbinom{0}{0} (a_{i\varkappa}^{(0)}) (a_{i\varkappa}^{(1)}) + \tbinom{2}{2} (a_{i\varkappa}^{(2)}) \}.$$

Die allgemeine Formel erhält man durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$(y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa+1)}) = \{ \sum_p \tbinom{k_\varkappa}{p} (y_{i\varkappa}^{(k_\varkappa-p)}) (a_{i\varkappa}^{(p)}) \}, \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots k_\varkappa)$$

die sich durch $k_\varkappa$-malige Differentiation der Gleichung (A) ergibt, und zwar wird:

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(k_\varkappa)}) = \{ \sum \binom{k_\varkappa - 1}{r_1 - 1} \binom{k_\varkappa - r_1 - 1}{r_2 - 1} \binom{k_\varkappa - r_1 - r_2 - 1}{r_3 - 1} \cdots \binom{k_\varkappa - r_1 - r_2 - \cdots - r_{p-1} - 1}{r_p - 1}$$

$$(a_{i\varkappa}^{(r_p - 1)}) (a_{i\varkappa}^{(r_{p-1} - 1)}) \cdots (a_{i\varkappa}^{(r_3 - 1)}) (a_{i\varkappa}^{(r_2 - 1)}) (a_{ik}^{(r_1 - 1)}) \},$$

wobei $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = k_\varkappa (r_1, r_2, \cdots r_p$ natürliche Zahlen) und die Summation über sämtliche $2^{k_\varkappa - 1}$ Glieder zu erstrecken ist, die den Zerlegungen der Zahl $k_\varkappa$ in Summanden $r_1, r_2, \cdots r_p$ entsprechen und die Zahl $k_\varkappa$ selbst als eine solche zu rechnen ist. Dabei sind auch alle Zerlegungen $r_1 + r_2 + \cdots + r_p$, die sich nur durch die Stellung der Summanden in dieser Summe unterscheiden, zu berücksichtigen.

§ 3.

Systeme der Determinantentransformation.

1. $C_m(Y)$.

Wir ordnen jetzt dem Systeme

(A) $$\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

ein System

(B) $$\left(\frac{dz_{i\varkappa}}{dx}\right) = (z_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})$$

in folgender Weise zu:

Aus der Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = Y \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

---

1) Dabei sind unter dem Symbole $\binom{n}{k}$ die Binomialkoeffizienten zu verstehen, also

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}.$$

bilden wir $\binom{n}{m}^2$ Determinanten

$$\sum \pm y_{g_1 h_1} y_{g_2 h_2} \cdots y_{g_m h_m} \qquad (g_1 < g_2 < \cdots < g_m;\ h_1 < h_2 < \cdots h_m).$$

Um diese Unterdeterminanten der Determinante $|Y| = |y_{i\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\cdots n)}$ passend bezeichnen zu können, denken wir uns die $\lambda = \binom{n}{m}$ Kombinationen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu m in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge gebracht. Ist in der eingeführten Anordnung $g_1, g_2, \cdots g_m$ die G-te und $h_1, h_2, \cdots h_m$ die H-te Kombination, so sei die Determinante

(1) $$\sum \pm y_{g_1 h_1} y_{g_2 h_2} \cdots y_{g_m h_m}$$

mit $C_{GH}^{(m)}$ bezeichnet. Aus den $\lambda^2 = \binom{n}{m}^2$ Determinanten $C_{GH}^{(m)}$ sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{(m)} & C_{12}^{(m)} & \cdots & C_{1\lambda}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)} & \cdots & C_{2\lambda}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{\lambda 1}^{(m)} & C_{\lambda 2}^{(m)} & \cdots & C_{\lambda\lambda}^{(m)} \end{pmatrix}$$

gebildet, die wir mit $C_m(Y)$ bezeichnen; wir wählen diese als Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ unseres Systems (B). $C_m(Y)$ heißt das „m-te abgeleitete“ oder auch das „$(n-m)$-te assoziierte“ System der Matrix Y.[1])

Das System $(z_{i\varkappa}) = C_m(Y)$ erfüllt nun die Bedingungen 1) und 2) des Satzes § 1, II; denn es ist

1) $$|C_m(Y)| = |Y|^{\binom{n-1}{m-1}}, \text{ folglich } \neq 0 \quad (\text{Satz von Franke}^{2)})$$

2) $$C_m[(c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})] = C_m(c_{i\varkappa})\, C_m(y_{i\varkappa}) = C_m(c_{i\varkappa})\, C_m(Y).^{2)}$$

Mithin ist die Matrix $(z_{i\varkappa}) = C_m(Y)$ eine Matriz $F_{i\varkappa}$, d. h. die Elemente $b_{i\varkappa}$ der Koeffizientenmatrix sind rationale Funktionen der Elemente $a_{i\varkappa}$.

Bezeichnet man ein Element $z_{i\varkappa}$ unseres Differentialgleichungssystems (B) mit $C_{GH}^{(m)}$, so geht bei analoger Bezeichnung der Koeffizientenmatrix das System (B) über in:

(B′) $$\left(\frac{d C_{GH}^{(m)}}{dx}\right) = (C_{GH}^{(m)})\,(b_{GH}^{(m)})$$

---

1) Vgl. in bezug auf dieses System die zusammenfassende Darstellung in dem Artikel über Kombinatorik, Determinanten und Matrices von Herrn A. Loewy in dem Repertorium von Pascal in der im Erscheinen begriffenen zweiten Auflage S. 138 ff.

2) Vgl. Pascal a. a. O. S. 139.

Zur Berechnung der Koeffizientenmatrix $(b_{GH}^{(m)})$ schlagen wir jetzt den folgenden Weg ein:

Wir ordnen der Unterdeterminante[1])

$$C_{GH}^{(m)} = \sum \pm y_{g_1 h_1} \cdot y_{g_2 h_2} \cdot \cdots \cdot y_{g_m h_m}$$

von $|Y|$ ihre algebraische Adjungierte

$$\frac{\partial^m |Y|}{\partial y_{g_1 h_1} \cdot \partial y_{g_2 h_2} \cdots \partial y_{g_m h_m}} \tag{2}$$

zu und bezeichnen sie mit $\Gamma_{GH}^{(m)}$. Aus den λ^2 Größen $\Gamma_{GH}^{(m)}$ bilden wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(m)} & \Gamma_{12}^{(m)} & \cdots & \Gamma_{1\lambda}^{(m)} \\ \Gamma_{21}^{(m)} & \Gamma_{22}^{(m)} & \cdots & \Gamma_{2\lambda}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Gamma_{\lambda 1}^{(m)} & \Gamma_{\lambda 2}^{(m)} & \cdots & \Gamma_{\lambda\lambda}^{(m)} \end{pmatrix};$$

sie sei mit $\Gamma_m(Y)$ bezeichnet.

Dann folgt nach dem Laplaceschen Zerlegungssatz

$$C_m(Y)^{-1} = \frac{\Gamma_m(Y)'}{|Y|}; \tag{3}$$

da für unsern jetzigen Fall

$$(b_{GH}^{(m)}) = C_m(Y)^{-1} \left(\frac{d C_m(Y)}{dx}\right)$$

ist, so wird

$$(b_{GL}^{(m)}) = \left(\frac{\Gamma_{GL}^{(m)}}{|Y|}\right)' \left(\frac{d C_{GL}^{(m)}}{dx}\right) = \left(\frac{\sum_{I=1}^{\lambda} \Gamma_{IG}^{(m)} \frac{d C_{IL}^{(m)}}{dx}}{|Y|}\right). \tag{4}$$

Dabei ist $\frac{d C_{IL}^{(m)}}{dx}$ gleich einer Summe von m Determinanten, die sich von $C_{IL}^{(m)}$ nur dadurch unterscheiden, daß in ihnen jeweils die Elemente einer Kolonne l_α $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$ durch ihre ersten Ableitungen ersetzt sind.

Wir verstehen im folgenden unter $C_{IL}^{(m, l_\alpha)}$ bez. $|Y^{(l_\alpha)}|$ eine Determinante, die aus $C_{IL}^{(m)}$ bzw. $|Y|$ dadurch hervorgeht, daß man die Elemente der l_α-ten Kolonne durch ihre ersten Derivierten ersetzt. Es wird daher nach dem Obigen

$$\frac{d C_{IL}^{(m)}}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{m} C_{IL}^{(m, l_\alpha)}. \tag{5}$$

---

1) Vergl. Pascal a. a. O. S. 143 ff.

Sei l_α eine der Kolonnen $l_1, l_2, \cdots l_m$, so wird, da in $|Y^{(l_\alpha)}|$ die Elemente aller übrigen Kolonnen außer der l_α-ten ungeändert sind, nach dem Laplaceschen Zerlegungssatz

$$(6) \qquad |Y^{(l_\alpha)}| = \sum_{I=1}^{\lambda} \Gamma_{IL}^{(m)} C_{IL}^{(m, l_\alpha)}.$$

1. Betrachten wir den in Gleichung (4) auftretenden Ausdruck

$$\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \frac{d C_{JL}^{(m)}}{dx}$$

für den Fall, daß $G = L$ (d. h. $g_\alpha = l_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots m)$) ist, so schreibt sich mit Hilfe der neu eingeführten Größen $C_{JL}^{(m, l_\alpha)}$ unter Benützung der Gleichungen (5) und (6) derselbe

$$(4\text{a}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JL}^{(m)} C_{JL}^{(m, l_\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{m} |Y^{(l_\alpha)}|.$$

Für $m = 1$ ergibt sich aber weiterhin aus Gleichung (6), wenn wir mit Y_{ik} die algebraische Adjungierte des Elementes y_{ik} in der Determinante $|Y|$ bezeichnen:

$$(5\text{a}) \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_{i l_\alpha} \frac{d y_{i l_\alpha}}{dx} = |Y^{(l_\alpha)}|.$$

Nach (A) wird indes

$$(6\text{a}) \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_{i l_\alpha} \frac{d y_{i l_\alpha}}{dx} = a_{l_\alpha l_\alpha} \cdot |Y|.$$

Aus (6a) und (5a) ergibt sich mithin

$$\frac{|Y^{(l_\alpha)}|}{|Y|} = a_{l_\alpha l_\alpha},$$

und wenn wir beachten, daß nach (4a)

$$\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JL}^{(m)} \frac{d C_{JL}^{(m)}}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{m} |Y^{(l_\alpha)}|$$

ist, so folgt aus (4)

$$(7) \qquad b_{LL}^{(m)} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m} |Y^{(l_\alpha)}|}{|Y|} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_{l_\alpha l_\alpha} = a_{l_1 l_1} + a_{l_2 l_2} + \cdots + a_{l_m l_m}.$$

Sind in den Formen $G = [g_1 \, g_2 \cdots g_m]$ und $L = [l_1 \, l_2 \cdots l_m]$ die Elemente in ihrer natürlichen Größenordnung $g_1 < g_2 < \cdots < g_m$ und

$l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ geordnet, so müssen notwendig, wenn in G und L dieselben Elemente vorhanden sind, wie wir im Voraufgehenden angenommen haben, die Elemente mit dem gleichen Index übereinstimmen, also $g_\alpha = l_\alpha$ $(\alpha = 1, 2 \cdots m)$ sein.

2. Es sei jetzt in $G = [g_1 \, g_2 \cdots g_m]$ und $L = [l_1 \, l_2 \cdots l_m]$ ein und nur ein Element, nämlich $g_\alpha \neq l_\alpha$, so daß also der Term

$$[g_1 \, g_2 \cdots g_m] \equiv [l_1 \, l_2 \cdots l_{\alpha-1} \, g_\alpha \, l_{\alpha+1} \cdots l_m].$$

Weiterhin soll unter $|Y^*|$ diejenige Determinante verstanden sein, die aus $|Y|$ dadurch hervorgeht, daß man die Elemente der Kolonne g_α durch die der Kolonne l_α ersetzt; ihr Wert ist also Null. Wir führen ferner die Determinante $|Y^{*(l_\beta)}|$ ein; sie unterscheidet sich von $|Y^*|$ nur dadurch, daß in der Kolonne l_β statt der Elemente ihre ersten Derivierten stehen.

Wir beschäftigen uns im weiteren mit der Zerlegung der Determinante $|Y^{*(l_\beta)}|$ und stellen zu diesem Zwecke folgende Überlegungen an: Es läßt sich bekanntlich die Größe $\Gamma_{JG}^{(m)} = \Gamma^{(m)}_{\left[\begin{smallmatrix} i_1 i_2 \cdots i_m \\ g_1 g_2 \cdots g_m \end{smallmatrix}\right]}$ als algebraische Adjungierte der Unterdeterminante $C_{JG}^{(m)}$ von $|Y|$ in Form einer Determinante darstellen, die nur darin von $|Y|$ abweicht, daß in ihr die Elemente $y_{i_\gamma g_\beta}$ $(\gamma, \beta = 1, 2 \cdots m)$ durch $\delta_{\gamma\beta}$ ersetzt sind, wo $\delta_{\gamma\beta}$ das Kroneckersche Symbol bedeutet. Entwickeln wir jetzt $|Y^{*(l_\beta)}|$ $(\beta = 1, 2 \cdots m)$ nach den Kolonnen $l_1 \, l_2 \cdots l_m$ gemäß dem Laplaceschen Zerlegungssatze, so erhalten wir eine Summe von Produkten, die sich aus den Determinanten

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} y_{i_1 l_1} \, y_{i_1 l_2} \cdots \dfrac{d y_{i_1 l_\beta}}{dx} \cdots y_{i_1 l_m} \\ y_{i_2 l_1} \, y_{i_2 l_2} \cdots \dfrac{d y_{i_2 l_\beta}}{dx} \cdots y_{i_2 l_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{i_m l_1} \, y_{i_m l_2} \cdots \dfrac{d y_{i_m l_\beta}}{dx} \cdots y_{i_m l_m} \end{vmatrix} = C_{JL}^{(m, l_\beta)}$$

($i_1 i_2 \cdots i_m$ eine der $\lambda = \binom{n}{m}$ Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu m)

und den zugehörigen algebraischen Adjungierten zusammensetzen. Man sieht leicht ein, daß die zu (8) gehörige Adjungierte durch eine einmalige Vertauschung der Zeilen g_α und l_α in $\Gamma_{JG}^{(m)}$ übergeführt werden kann, also den Wert $-\Gamma_{JG}^{(m)}$ besitzt.

Es wird folglich

$$(9) \qquad \sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \, C_{JL}^{(m, l_\beta)} = - \, |Y^{*(l_\beta)}|$$

und nach (5)

$$(10)\qquad \sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \frac{d C_{JL}^{(m)}}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} C_{JL}^{(m,\, l_\beta)} = - \sum_{\beta=1}^{m} | Y^{*(l_\beta)} |.$$

Da aber $| Y^{*(l_\beta)} | = 0$ ist, wenn $l_\beta \neq l_\alpha$ ist, so erhalten wir

$$(9\text{a})\qquad - \sum_{\beta=1}^{m} | Y^{*(l_\beta)} | = - | Y^{*(l_\alpha)} |.$$

Weiter folgt aus (9) für $m = 1$ und $\beta = \alpha$

$$(9\text{b})\qquad - | Y^{*(l_\alpha)} | = \sum_{\mu=1}^{n} Y_{\mu g_\alpha} \frac{d y_{\mu l_\alpha}}{dx},$$

was auch die direkte Entwicklung von $| Y^{*(l_\alpha)} |$ nach der Kolonne l_α ergibt. Nun folgt aber aus dem System (A)

$$\sum_{\mu=1}^{n} Y_{\mu g_\alpha} \frac{d y_{\mu l_\alpha}}{dx} = | Y | \, a_{g_\alpha l_\alpha},$$

wodurch (9a) und (9b) übergeht in

$$(9\text{c})\qquad - \sum_{\beta=1}^{m} | Y^{*(l_\beta)} | = - | Y^{*(l_\alpha)} | = | Y | \cdot a_{g_\alpha l_\alpha}.$$

Gleichung (4) nimmt daher in diesem Falle bei Benützung von (10) und (9c) die Form an:

$$(11)\qquad b_{GL}^{(m)} = \frac{\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \, C_{JL}^{(m,\, l_\beta)}}{| Y |} = \frac{- \sum_{\beta=1}^{m} | Y^{*(l_\beta)} |}{| Y |} = a_{g_\alpha l_\alpha}.$$

Folgen in den Termen G und L die Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge $g_1 < g_2 < \cdots < g_m$ und $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ aufeinander und ist in dem Term G nur ein einziges Element g von einem Element l in L verschieden, so brauchen diese verschiedenen Elemente (außer für $m = 1$) durchaus nicht denselben Index zu haben. Es sei $g_\alpha \neq l_\beta$; dann aber kann bei der angegebenen Reihenfolge der Elemente von G und L durch $(\alpha + \beta \pm 2w)$malige Vertauschung von Kolonnen aus $C_{JL}^{(m)}$ eine neue Matrix $C'^{(m)}_{JL}$ hergeleitet werden, bei der die Kolonne l_β an α-ter Stelle steht, während für die übrigen Elemente $g_\gamma = l_\gamma$ ist; w bedeutet hierbei eine ganze positive Zahl. Es ist also

$$C'^{(m)}_{JL} = (-1)^{\alpha+\beta} \, C_{JL}^{(m)},$$

eine Matrix, auf die wir Gleichung (11) anwenden dürfen, so daß wir erhalten

$$\frac{\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \frac{dC'^{(m)}_{JL}}{dx}}{|Y|} = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \frac{dC^{(m)}_{JL}}{dx}}{|Y|} = (-1)^{\alpha+\beta} a_{g_\alpha l_\beta}$$

oder

(11a) $b_{GL}^{(m)} = (-1)^{\alpha+\beta} a_{g_\alpha l_\beta}$, wenn $g_\alpha \neq l_\beta$ und die Elemente g und l in G und L in der natürlichen Reihenfolge stehen.

3. Sind schließlich in G und L zwei oder mehr Elemente $g_\alpha \neq l_\beta$, so wird, wie aus obiger Überlegung unmittelbar hervorgeht,

$$\sum_{J=1}^{\lambda} \Gamma_{JG}^{(m)} \frac{dC^{(m)}_{JL}}{dx} = 0, \tag{12}$$

also nach (4)

$$b_{GL}^{(m)} = 0. \tag{12a}$$

Die Matrix $(b_{GL}^{(m)})$ *wird daher, sofern* $g_1 < g_2 < \cdots < g_m$ und $l_1 < l_2 < \cdots l_m$ ist:

(13)
$$\begin{cases} b_{GL}^{(m)} = a_{g_1 g_1} + a_{g_2 g_2} + \cdots + a_{g_m g_m}, & \textit{wenn } G = L \textit{ ist, d. h. } g_\alpha = l_\alpha \ (\alpha = 1, 2 \cdots m), \\ b_{GL}^{(m)} = (-1)^{\alpha+\beta} a_{g_\alpha l_\beta}, & \textit{wenn in den Termen } [g_1 g_2 \cdots g_m] \textit{ und } [l_1 l_2 \cdots l_m] \textit{ nur ein Element } g_\alpha \neq l_\beta \textit{ ist und die Indices } \alpha \textit{ und } \beta \textit{ die Stelle bezeichnen, an der in } G \textit{ bzw. } L \textit{ die Elemente } g_\alpha \textit{ bzw. } l_\beta \textit{ stehen,} \\ b_{GL}^{(m)} = 0, & \textit{wenn in } [g_1 g_2 \cdots g_m] \textit{ und } [l_1 l_2 \cdots l_m] \textit{ zwei oder mehr Elemente } g_\alpha \neq l_\beta \textit{ sind.} \end{cases}$$

Zu demselben Resultat gelangt man auch durch direkte Differentiation von $C_{GH}^{(m)}$ unter Berücksichtigung des Systems (A).[1]

Für $m = 1$ geht das System $(b_{GH}^{(m)})$ in die Koeffizientenmatrix $a_{i\varkappa}$ des Systems (A) selbst über, da hier notwendig, wie schon oben erwähnt, $\alpha = \beta = 1$ sein muß, weil die Terme G und L nur aus *einem* Element bestehen.

Für $m = 2$ folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (11), indem wir also nicht $C_2(Y)$, sondern ein damit verwandtes System bilden,

1) Schlesinger: Crelle J. f. r. u. ang. Math., Band 128, S. 296.

bei dem das eine verschiedene Elementepaar g und l in G und L an derselben Stelle steht:

$$(11') \qquad \begin{cases} b_{l_1 l_1}^{l_1 l_1} = a_{l_1 l_1} + a_{l_2 l_2} \\ b_{l_1 l_2}^{\alpha_1 l_2} = a_{\alpha_1 l_1}; \quad b_{l_1 l_2}^{l_1 \alpha_2} = a_{\alpha_2 l_2} & (\alpha_1 \neq l_1;\ \alpha_2 \neq l_2) \\ b_{l_1 l_2}^{\alpha_1 \alpha_2} = 0. & (\alpha_1 \neq l_1 \text{ und } \alpha_2 \neq l_2) \end{cases}$$

Mithin lautet das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d y_{l_1 l_2}^{g_1 g_2}}{dx} = \sum_{\alpha_1=1}^{n} y_{\alpha_1 l_2}^{g_1 g_2} a_{\alpha_1 l_1} + \sum_{\alpha_2=1}^{n} y_{l_1 \alpha_2}^{g_1 g_2} a_{\alpha_2 l_2}$$

und stimmt mit dem von Fuchs[1]) aufgestellten bei entsprechender Bezeichnung überein. Es ist mithin das dort aufgeführte System nicht mit dem System $C_2(Y)$ identisch; aus dem zweiten Abschnitte unserer Herleitung wird sich der Zusammenhang dieser beiden Differentialgleichungssysteme ergeben.

Für $m = n - 1$ erhalten wir aus (13), wenn g_α bez. l_β die in $G = [g_1 g_2 \cdots g_{n-1}]$ und $L = [l_1 l_2 \cdots l_{n-1}]$ fehlenden von den n Elementen $1, 2, \cdots n$ bedeuten, so daß analog $b_{[l_1 l_2 \cdots l_{n-1}]}^{[g_1 g_2 \cdots g_{n-1}]} = b_{g_\alpha l_\beta}$ ist:

$$b_{g_\alpha l_\beta} = (-1)^{g_\alpha + l_\beta} \left(- a_{l_\beta g_\alpha} + \delta_{g_\alpha l_\beta} \sum_{r=1}^{n} a_{rr} \right);$$

hierbei bedeutet δ_{ik} das Kroneckersche Symbol mit den zwei Werten 0 und 1.

Dieses System wurde von Herrn Schlesinger[2]) ebenfalls aufgestellt, wo aber das Vorzeichen $(-1)^{g_\alpha + l_\beta}$ unberücksichtigt geblieben ist, was auch daraus erhellt, daß bei der Substitution, die zum adjun-

---

1) Fuchs, Zur Theorie der Abelschen Funktionen; Sitzungsberichte der Berl. Akademie (1898), S. 478, 479.

2) Schlesinger: Crelle J. f. r. u. ang. Math., Bd. 128, S. 296. Nach Abschluß dieser Arbeit werde ich mit einer soeben erschienenen Abhandlung von Herrn Darboux (Annales de l'école normale 1909/10) bekannt, in der ebenfalls von einem Systeme Gebrauch gemacht ist, das zu den in § 3 behandelten gehört.

Es ist nämlich nach dortiger Definition

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} x_i^1 & x_k^1 \\ x_i^2 & x_k^2 \end{vmatrix},$$

wobei die Größen x_i dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

genügen; ferner

$$\Delta_{iklm} = u_{ik} u_{lm} + u_{il} u_{mk} + u_{im} u_{kl},$$

gierten Systeme $\left(\frac{\Gamma_1(Y)}{|Y|}\right)$ überführt, l. c. kein Vorzeichen zu beachten ist. Es geht mithin unser System in das von Herrn Schlesinger aufgestellte über durch die Substitution:

$$z_{g_\alpha l_\beta} = (-1)^{g_\alpha + l_\beta} \zeta_{g_\alpha l_\beta}.$$

2. $\Gamma_m(Y)$.

Wir haben schon gelegentlich der Berechnung der Koeffizientenmatrix $(b_{i\varkappa})$ des Systems $C_m(Y)$ die Matrix $\Gamma_m(Y)$ definiert, von der wir ohne weiteres einsehen, daß sie ein System $F_{i\varkappa}$ des § 1, II ist; in

---

mithin

$$\Delta_{iklm} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i^1 & x_k^1 & x_l^1 & x_m^1 \\ x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 & x_m^2 \\ x_i^1 & x_k^1 & x_l^1 & x_m^1 \\ x_i^2 & x_k^2 & x_l^2 & x_m^2 \end{vmatrix}.$$

Wir führen jetzt durch Definition die Größen ein:

$$y_{i,\varkappa} = y_{i+n,\varkappa} = x_\varkappa^i \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

$$y_{i,\varkappa} = \delta_{i,\varkappa} \qquad (\varkappa = n+1, n+2, \ldots 2n)$$

$$\alpha_{i\varkappa} = a_{\varkappa i} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

$$\alpha_{i\varkappa} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = n+1, n+2, \ldots 2n \\ \varkappa = n+1, n+2, \ldots 2n \end{pmatrix}$$

Dann geht $2\Delta_{iklm}$ über in

$$z_{i\ k\ l\ m}^{1\ 2\ n+1\ n+2} = \begin{vmatrix} y_{1i} & y_{1k} & y_{1l} & y_{1m} \\ y_{2i} & y_{2k} & y_{2l} & y_{2m} \\ y_{n+1,i} & y_{n+1,k} & y_{n+1,l} & y_{n+1,m} \\ y_{n+2,i} & y_{n+2,k} & y_{n+2,l} & y_{n+2,m} \end{vmatrix},$$

wobei die Größen y_{ik} dem Differentialgleichungssystem

$$\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dt}\right) = (y_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa})$$

genügen.

Bilden wir nicht die Operation $C_4(Y)$, sondern ein damit verwandtes System, bei dem in unserer früheren Bezeichnung in § 3, 2 das eine verschiedene Elementepaar g und l in G und L an derselben Stelle steht, so läßt sich das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz_{iklm}}{dt} = \sum z_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} b_{i\ k\ l\ m}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 1, 2, \ldots 2n)$$

mit Hilfe von Gleichung (13) unmittelbar schreiben als

$$\frac{dz_{iklm}}{dt} = \sum_\mu z_{\mu klm}\alpha_{\mu i} + \sum_\mu z_{i\mu lm}\alpha_{\mu k} + \sum_\mu z_{ik\mu m}\alpha_{\mu l} + \sum_\mu z_{ikl\mu}\alpha_{\mu m}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots 2n)$$

was nach dem Obigen direkt mit dem Resultate von Herrn Darboux übereinstimmt

folge dessen lassen sich die Elemente der Koeffizientenmatrix $(\beta_{i\varkappa})$ des Systems

(B) $$\left(\frac{d\Gamma^{(m)}_{GH}}{dx}\right) = (\Gamma^{(m)}_{GH})(\beta^{(m)}_{GH})$$

als rationale Funktionen der Elemente $a_{i\varkappa}$ des Systems (A) darstellen.

Wir machen es uns im folgenden zur Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Systemen $(b_{i\varkappa})$ und $(\beta_{i\varkappa})$ darzulegen.

Aus Gleichung (3) auf Seite 15 folgt

$$(\Gamma_m(Y))'(C_m(Y)) = (|Y|),$$

wobei $(|Y|) = (|Y|\delta_{i\varkappa})$ ist.

Mithin

$$(\Gamma_m(Y)) = (|Y|)(C_m(Y'))^{-1},$$

da $(C_m(Y)') = (C_m(Y'))$ ist; folglich

$$(\Gamma_m(Y))^{-1} = (C_m(Y'))(|Y|)^{-1} \text{ und } (|Y|)^{-1} = \left(\frac{1}{|Y|}\right),$$

$$\left(\frac{d\Gamma_m(Y)}{dx}\right) = (|Y|)\left(\frac{d(C_m(Y'))^{-1}}{dx}\right) + \left(\frac{d(|Y|)}{dx}\right)(C_m(Y'))^{-1},$$

woraus sich ergibt

(15) $$\begin{aligned}(\beta_{i\varkappa}) &= (\Gamma_m(Y))^{-1}\left(\frac{d\Gamma_m(Y)}{dx}\right)\\ &= (C_m(Y'))\left(\frac{dC_m(Y')^{-1}}{dx}\right) + (C_m(Y'))\left(\frac{1}{|Y|}\frac{d|Y|}{dx}\right)(C_m(Y'))^{-1}.\end{aligned}$$

Nun wird

$$\left(\frac{1}{|Y|}\frac{d|Y|}{dx}\right) = \left(\frac{dln\,|Y|}{dx}\right) = \left(\sum_{r=1}^{n} a_{rr}\right).$$

Führt man weiter die Matrix $(c_{i\varkappa})$ durch die Definition ein

(16) $$(c_{i\varkappa}) = (C_m(Y'))\left(\frac{dC_m(Y')^{-1}}{dx}\right) = C_m(Y)'\left(\frac{dC_m(Y^{-1})}{dx}\right)',$$

so erhält man für die Transponierte

$$\left(\frac{dC_m(Y^{-1})}{dx}\right)(C_m(Y)) = (c_{i\varkappa})',$$

und da $(C_m(Y^{-1}))(C_m(Y)) = (\delta_{i\varkappa})$ ist, so folgt mittels Differentiation dieser Gleichung

(16a) $$(c_{i\varkappa})' = \left(\frac{dC_m(Y^{-1})}{dx}\right)(C_m(Y)) = -C_m(Y^{-1})\left(\frac{dC_m(Y)}{dx}\right) = -(b_{i\varkappa}),$$

folglich nach (15), (16) und (16a)

(15a) $$\boldsymbol{(\beta_{i\varkappa}) = -(b_{i\varkappa})' + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{rr}\right).}$$

$$3.\ \left(\frac{\Gamma_m(Y)}{|Y|}\right)=(\overline{\Gamma_m(Y)}).$$

Aus dem System $\Gamma_m(Y)$ ergibt sich ein neues, wenn man seine Elemente durch die Determinante $|Y|$ dividiert. Auch hier sind die Eigenschaften 1) und 2) des Satzes § 1, II ohne weiteres klar, da ja, wenn (Y) übergeht in $(C)(Y)$, das System $(\overline{\Gamma_m(Y)})$ sich in das System $(\overline{\Gamma_m(C)})(\overline{\Gamma_m(Y)})$ transformiert.

Der Zusammenhang der Koeffizientenmatrix $(\overline{\beta_{i\varkappa}})$ mit $(\beta_{i\varkappa})$ und $(b_{i\varkappa})$ ergibt sich aus dem Nachstehenden:

$$(\overline{\Gamma_m(Y)})^{-1}=(\Gamma_m(Y))^{-1}(|Y|)$$

$$\left(\frac{d\overline{\Gamma_m(Y)}}{dx}\right)=\left(\frac{1}{|Y|}\right)\left(\frac{d\Gamma_m(Y)}{dx}\right)+\left(\frac{d\left(\frac{1}{|Y|}\right)}{dx}\right)(\Gamma_m(Y))$$

$$(\overline{\beta_{i\varkappa}})=D_x(\overline{\Gamma_m(Y)})=(\Gamma_m(Y))^{-1}\left(\frac{d\Gamma_m(Y)}{dx}\right)-(\Gamma_m(Y))^{-1}\left(\frac{1}{|Y|}\frac{d|Y|}{dx}\right)(\Gamma_m(Y))$$

oder

$$(17)\qquad (\overline{\beta_{i\varkappa}})=(\beta_{i\varkappa})-\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\lambda}\right)=-(b_{i\varkappa})'.$$

Für $m=1$ geht dieses System in das adjungierte System[1]) über das mithin nach (13) das Koeffizientensystem

$$(17\text{a})\qquad \begin{cases}\overline{\beta}_{ii}=-a_{ii}\\ \overline{\beta}_{i\varkappa}=-a_{\varkappa i}\quad (i\neq\varkappa)\end{cases}\qquad \text{also } \overline{\beta}_{i\varkappa}=-a_{\varkappa i}$$

besitzt.

4.

Weitere Systeme $F_{i\varkappa}$ erhalten wir durch Verallgemeinerung des vorigen Abschnittes, in welchem wir das System $\Gamma_m(Y)$ durch $|C_n(Y)|=|\Gamma_0(Y)|=|Y|$ dividierten. So ergibt sich in leicht verständlicher Bezeichnung das Koeffizientensystem für

$$\left(\frac{C_m(Y)}{|C_{m_1}(Y)|}\right):(\varepsilon^1_{i\varkappa})=(b_{i\varkappa})-\binom{n-1}{m_1-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{C_m(Y)}{|\Gamma_{m_1}(Y)|}\right):(\varepsilon^2_{i\varkappa})=(b_{i\varkappa})-\binom{n-1}{m_1}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{\Gamma_m(Y)}{|C_{m_1}(Y)|}\right):(\varepsilon^3_{i\varkappa})=(\beta_{i\varkappa})-\binom{n-1}{m_1-1}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{\Gamma_m(Y)}{|\Gamma_{m_1}(Y)|}\right):(\varepsilon^4_{i\varkappa})=(\beta_{i\varkappa})-\binom{n-1}{m_1}\left(\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\lambda}\right).$$

---

1) Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen S. 27.

Statt der Elemente $y_{i\varkappa}$ können wir auch in den Operationen $C_m(Y)$, $\Gamma_m(Y)$, $\overline{\Gamma_m(Y)}$ usw. ihre Ableitungen setzen, wodurch neue Systeme $F_{i\varkappa}$ erhalten werden, deren Koeffizientenmatrices nach § 3 und § 2 berechnet werden können, sofern nur die Determinanten dieser Systeme nicht verschwinden.

§ 4.

Systeme der Produkttransformation.

Es seien jetzt m Differentialsysteme

$$(A_r) \qquad \left(\frac{dy^r_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y^r_{i\varkappa})\,(a^r_{i\varkappa}) \qquad (r = 1, 2, \cdots m)$$

gegeben und es sei $(y^r_{i\varkappa})$ auch kurz mit (Y_r) bezeichnet. Diesen m Systemen ordnen wir ein neues System

$$(\mathrm{B}) \qquad \left(\frac{dz_{i\varkappa}}{dx}\right) = (z_{i\varkappa})\,(b_{i\varkappa})$$

in folgender Weise zu:

Wir bilden aus den Elementen der Matrices (Y_r) Produkte von der Form

$$y^1_{\alpha_1\beta_1} \cdot y^2_{\alpha_2\beta_2} \cdots y^m_{\alpha_m\beta_m}, \qquad \left(\begin{array}{l} \alpha_1, \beta_1 = 1, 2, \cdots n_1 \\ \alpha_2, \beta_2 = 1, 2, \cdots n_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_m, \beta_m = 1, 2, \cdots n_m \end{array}\right)$$

die wir passend bezeichnen wollen.

Da die Größe α_1 die Werte $1, 2, \ldots n_1$, α_2 die Werte $1, 2, \ldots n_2$, α_m die Werte $1, 2, \ldots n_m$ sämtlich durchläuft, so ist die Anzahl π aller möglichen Terme $[\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m]$ gleich $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$; diese seien in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge gebracht und in dieser Anordnung sei $[\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m]$ der A-te, $[\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_m]$ der B-te Term; dann sei das Element

$$y^1_{\alpha_1\beta_1} \cdot y^2_{\alpha_2\beta_2} \cdot \ldots \cdot y^m_{\alpha_m\beta_m}$$

auch mit $z^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$ oder kurz mit $z^{(m)}_{AB}$ bezeichnet. Aus diesen π^2 Produkten bilden wir eine neue Matrix

$$\begin{pmatrix} z^{(m)}_{11} & z^{(m)}_{12} & \ldots & z^{(m)}_{1\pi} \\ z^{(m)}_{21} & z^{(m)}_{22} & \ldots & z^{(m)}_{2\pi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^{(m)}_{\pi 1} & z^{(m)}_{\pi 2} & \ldots & z^{(m)}_{\pi\pi} \end{pmatrix},$$

die wir auch mit $\Pi_m(Y)$ oder mit $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$ bezeichnen und nach dem Vorgange von Herrn Hurwitz[1]) als Produkttransformation bezeichnen.

1) A. Hurwitz, Math. Ann. 45, 388 (1894).

Diese neue Matrix $\Pi_m(Y_r)$ hat die Eigenschaften 1) und 2) des Satzes § 1, II. Denn nach einem Satze von Kronecker ist

$$|\Pi_m(Y_r)| = \underset{r=1,2,\dots m}{\mathfrak{P}} |Y_r|^{\frac{\pi}{n_r}},$$

wenn $\mathfrak{P}$ das Zeichen für Produkt bedeutet, und fällt folglich von Null verschieden aus. Transformiert sich ferner (Y_r) in $(C_r)(Y_r)$, wobei (C_r) eine konstante Matrix bedeutet, so transformiert sich $\Pi_m(Y_r)$ in $\Pi_m(C_r)\ \Pi_m(Y_r)$. Es läßt sich daher, wie sich durch wiederholte Anwendung des Satzes § 1, II ohne weiteres ergibt, die Koeffizientenmatrix dieses Systems $\Pi_m(Y_r)$ als eine Matrix, deren Elemente rationale Funktionen der Elemente $a^r_{i\varkappa}$ sind, darstellen.

Bezeichnen wir ein Glied der Koeffizientenmatrix von $\Pi_m(Y_r) = (z^{(m)}_{AB})$ entsprechend mit $b^{(m)}_{AB}$, so schreibt sich das System (B) in unserm Falle in der Form

$$(\mathrm{B}') \qquad \left(\frac{d z^{(m)}_{AB}}{dx}\right) = (z^{(m)}_{AB})\,(b^{(m)}_{AB}).$$

Wir können diese Koeffizientenmatrix $(b^{(m)}_{AB})$ oder ausführlicher geschrieben $(b^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\beta_2\beta_2\dots\beta_m})$ leicht berechnen. Es ist nämlich

$$(\Pi_m(Y_r))^{-1}\left(\frac{d\,\Pi_m(Y_r)}{dx}\right) = (b^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}).$$

Ferner ist

$$(\Pi_m(Y_r))^{-1} = \Pi_m(Y_r^{-1})$$

und

$$(Y_r)^{-1} = (y^r_{\alpha_r\beta_r})^{-1} = (\overline{Y^r_{\beta_r\alpha_r}}), \qquad (\alpha_r, \beta_r = 1, 2, \dots n_r)$$

wenn $\overline{Y^r_{\alpha_r\beta_r}} \cdot |Y_r|$ die Adjungierte von $y^r_{\alpha_r\beta_r}$ in der Determinante $|Y_r|$ ist. Daraus folgt

$$(\Pi_m(Y_r))^{-1} = (z^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m})^{-1} = (\overline{Y^1_{\beta_1\alpha_1}} \cdot \overline{Y^2_{\beta_2\alpha_2}} \cdots \overline{Y^m_{\beta_m\alpha_m}}).$$

Weiterhin ergibt sich

$$\left(\frac{d\,\Pi_m(Y_r)}{dx}\right) = \left(\sum_{r=1}^{m} y^1_{\alpha_1\beta_1}\, y^2_{\alpha_2\beta_2} \cdots \frac{d y^r_{\alpha_r\beta_r}}{dx} \cdots y^m_{\alpha_m\beta_m}\right)$$

und mithin wird

$$(17) \qquad (b^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}) = \Bigg(\sum_{r=1}^{m} \sum_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m} \overline{Y^1_{\lambda_1\alpha_1}} \cdot \overline{Y^2_{\lambda_2\alpha_2}} \cdots \overline{Y^r_{\lambda_r\alpha_r}} \cdots \overline{Y^m_{\lambda_m\alpha_m}} \cdot y^1_{\lambda_1\beta_1} \cdot y^2_{\lambda_2\beta_2} \cdots \frac{d y^r_{\lambda_r\beta_r}}{dx} \cdots y^m_{\lambda_m\beta_m}\Bigg). \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1, 2, \dots n_1 \\ \lambda_2 = 1, 2, \dots n_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_m = 1, 2, \dots n_m \end{pmatrix}$$

Da hierbei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ die angegebenen Werte unabhängig voneinander durchlaufen, so folgt aus (17)

$$(17a)\quad (b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}) = \left\{\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{\lambda_1=1}^{n_1}\overline{Y^1_{\lambda_1\alpha_1}}\, y^1_{\lambda_1\beta_1}\sum_{\lambda_2=1}^{n_2}\overline{Y^2_{\lambda_2\alpha_2}}\, y^2_{\lambda_2\beta_2}\cdots \sum_{\lambda_r=1}^{n_r}\overline{Y^r_{\lambda_r\alpha_r}}\frac{d\,y^r_{\lambda_r\beta_r}}{d\,x}\cdots\sum_{\lambda_m=1}^{n_m}\overline{Y^m_{\lambda_m\alpha_m}}\, y^m_{\lambda_m\beta_m}\right)\right\}.$$

Nun folgt aber aus bekannten Determinantensätzen und aus den Systemen (A_r):

$$(18)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda_r=1}^{n_r}\overline{Y^r_{\lambda_r\alpha_r}}\, y^r_{\lambda_r\beta_r} = \delta_{\alpha_r\beta_r} & (r=1,2,\ldots m;\ \delta_{\alpha_r\beta_r}\ \text{das Kroneckersche Symbol}) \\ \sum_{\lambda_r=1}^{n_r}\overline{Y^r_{\lambda_r\alpha_r}}\frac{d\,y^r_{\lambda_r\beta_r}}{d\,x} = a^r_{\alpha_r\beta_r}. & (r=1,2,\ldots m) \end{cases}$$

Bei Benützung der Gleichung (18) geht (17a) über in

$$(17b)\quad (b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}) = \left\{\sum_{r=1}^{m}\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdots\delta_{\alpha_{r-1}\beta_{r-1}}\cdot a^r_{\alpha_r\beta_r}\delta_{\alpha_{r+1}\beta_{r+1}}\cdots\delta_{\alpha_m\beta_m}\right\}.$$

1. Sind also die beiden Terme $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$ und $[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]$ identisch, $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]\equiv[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]$, d. h. $\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\ldots,\alpha_m=\beta_m$, so ergibt sich aus (17b)

$$b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = a^1_{\alpha_1\alpha_1} + a^2_{\alpha_2\alpha_2} + \cdots + a^m_{\alpha_m\alpha_m}.$$

2. Ist in den beiden Termen $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$ und $[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]$ *ein* Element $\alpha_p \neq \beta_p$ (p eine der Zahlen $1,2,\ldots m$), während die übrigen Elemente $\alpha_r=\beta_r$ sind, so folgt aus (17b)

$$b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} = a^p_{\alpha_p\beta_p}.$$

3. Sind in den beiden Termen $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$ und $[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]$ zwei oder mehr Elemente $\alpha_r \neq \beta_r$, so folgt aus (17b)

$$b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} = 0.$$

Es wird daher die Matrix $(b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m})$

$$(19)\quad \begin{cases} \boldsymbol{b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = a^1_{\alpha_1\alpha_1} + a^2_{\alpha_2\alpha_2} + \cdots + a^m_{\alpha_m\alpha_m}} \\ \boldsymbol{b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} = a^p_{\alpha_p\beta_p}}, & \text{wenn in } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \text{ und } [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m] \text{ ein und nur ein Element } \alpha_p \neq \beta_p. \\ \boldsymbol{b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m} = 0}, & \text{wenn in } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \text{ und } [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m] \text{ zwei oder mehr Elemente } \alpha_r \neq \beta_r \text{ sind.} \end{cases}$$

Wir wollen hier die Rechnung an einem Beispiele durchführen. Für $m = 2$ erhalten wir aus (19)

$$(19\text{a})\quad \begin{cases} b^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_2} = a^1_{\alpha_1\alpha_1} + a^2_{\alpha_2\alpha_2} \\ b^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\alpha_2} = a^1_{\alpha_1\beta_1}; \quad b^{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_1\beta_2} = a^2_{\alpha_2\beta_2} \\ b^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} = 0, \text{ wenn } \alpha_1 \neq \beta_1 \text{ und } \alpha_2 \neq \beta_2. \end{cases}$$

Das Differentialgleichungssystem lautet daher

$$(\text{B}_2)\quad \begin{aligned} \frac{dz^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}}{dx} &= \sum_{\lambda_1\lambda_2} z^{\alpha_1\alpha_2}_{\lambda_1\lambda_2} b^{\lambda_1\lambda_2}_{\beta_1\beta_2} && \begin{pmatrix}\lambda_1 = 1, 2, \cdots n_1\\ \lambda_2 = 1, 2, \cdots n_2\end{pmatrix} \\ &= z^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}\left(a^1_{\beta_1\beta_1} + a^2_{\beta_2\beta_2}\right) + \sum_{\lambda_1'} z^{\alpha_1\alpha_2}_{\lambda_1'\beta_2} b^{\lambda_1'\beta_2}_{\beta_1\beta_2} \\ &\quad + \sum_{\lambda_2'} z^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\lambda_2'} b^{\beta_1\lambda_2'}_{\beta_1\beta_2} && \begin{pmatrix}\lambda_1' = 1, 2, \cdots \beta_1 - 1, \beta_1 + 1, \cdots n_1\\ \lambda_2' = 1, 2, \cdots \beta_2 - 1, \beta_2 + 1, \cdots n_1\end{pmatrix} \\ &= \sum_{\lambda_1=1}^{n_1} z^{\alpha_1\alpha_2}_{\lambda_1\beta_2} a^1_{\lambda_1\beta_1} + \sum_{\lambda_2=1}^{n_2} z^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\lambda_2} a^2_{\lambda_2\beta_2}. \end{aligned}$$

Setzen wir $n_1 = n_2 = 2$ und schreiben die beiden gegebenen Systeme (A_r) in der Form

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 a_{11} + y_2 a_{21} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 a_{12} + y_2 a_{22} \end{cases} (\text{A}_1) \qquad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_1 b_{11} + z_2 b_{21} \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_1 b_{12} + z_2 b_{22} \end{aligned} \quad (\text{A}_2),$$

so wird in (19a) zu setzen sein:

$$\begin{aligned} y^1_{\beta_1} &= y_{\beta_1} & a^1_{\alpha_1\beta_1} &= a_{\alpha_1\beta_1} \\ y^2_{\beta_2} &= z_{\beta_2} & a^2_{\alpha_1\beta_1} &= b_{\alpha_1\beta_1}. \end{aligned} \qquad z_{\lambda_1\lambda_2} = y_{\lambda_1} \cdot z_{\lambda_2}$$

Mit Hilfe von (20) ergibt sich auch direkt

$$\begin{aligned} \frac{dy_1 z_1}{dx} &= y_1 z_1 \cdot a_{11} + y_2 z_1 \cdot a_{21} + y_1 z_1 \cdot b_{11} + y_1 z_2 \cdot b_{21} \\ \frac{dy_1 z_2}{dx} &= y_1 z_2 \cdot a_{11} + y_2 z_2 \cdot a_{21} + y_1 z_1 \cdot b_{12} + y_1 z_2 \cdot b_{22} \\ \frac{dy_2 z_1}{dx} &= y_1 z_1 \cdot a_{12} + y_2 z_1 \cdot a_{22} + y_2 z_1 \cdot b_{11} + y_2 z_2 \cdot b_{21} \\ \frac{dy_2 z_2}{dx} &= y_1 z_2 \cdot a_{12} + y_2 z_2 \cdot a_{22} + y_2 z_1 \cdot b_{12} + y_2 z_2 \cdot b_{22}. \end{aligned}$$

Die direkte Berechnung stimmt also mit unseren Formeln (19) überein.

Wir wollen noch einen speziellen Fall behandeln, in dem sich die Koeffizientenmatrix $\left(b^{(m)}_{AB}\right)$ von $\Pi_m(Y_r)$ leicht direkt bestimmt. Setzt man

$$\left(\frac{dy^1_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y^1_{i\varkappa})(a^1_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(A_1) \text{ und } (Y_r) = (y^r_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}), \qquad (r = 2, 3, \cdots m)$$

so daß offenbar (Y_r) für $r = 2, 3, \cdots, m$ das System befriedigt:

$$\left(\frac{dy^r_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y^r_{i\varkappa})(a^r_{i\varkappa}), \text{ wo } (a^r_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ist, so sind die Elemente von $\Pi_m(Y_r)$ von der Form

$$y^1_{\alpha_1\beta_1} y^2_{\alpha_2\beta_2} \cdots y^m_{\alpha_m\beta_m} = y^1_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \cdots \delta_{\alpha_m\beta_m}.$$

Es soll ferner ein Term $[\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m]$ vor $[\beta_1\beta_2 \cdots \beta_m]$ stehen, wenn $\alpha_1 - \beta_1 \leqq 0$ und die erste nicht verschwindende Differenz $(\alpha_r - \beta_r)(r = 2, 3, \cdots m)$ negativ ist. Die Glieder von $\Pi_m(Y_r)$ verschwinden nach dem Obigen nur dann nicht, wenn $[\alpha_2 \cdots \alpha_m] \equiv [\beta_2 \cdots \beta_m]$, d. h. $\alpha_2 = \beta_2, \cdots, \alpha_m = \beta_m$ ist, woraus folgt, daß

$$\Pi_m(Y_r) = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & Y_1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$(b^{(m)}_{AB}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_1 \end{pmatrix}$$

ist; d. h.

$$b^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = a^1_{\alpha_1\beta_1}, \quad \text{wenn } [\alpha_2 \cdots \alpha_m] \equiv [\beta_2 \cdots \beta_m],$$

$$b^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = 0, \qquad \text{wenn } [\alpha_2 \cdots \alpha_m] \not\equiv [\beta_2 \cdots \beta_m].$$

Beachtet man, daß $a^r_{\alpha_r\alpha_r} = 0 (r = 2, 3, \cdots m)$, so folgt dasselbe aus unserem System (19).

Wir können analog wie im vorhergehenden Paragraphen ein neues System $F_{i\varkappa}$ auch dadurch gewinnen, daß wir die Elemente von $\Pi_m(Y_r)$ dividieren durch die Determinante $|\Pi_{m_1}(Y_{r_1})| (m_1 < m; r_1 = 1, 2, \cdots m_1)$. Es ergibt sich (vgl. § 3, S. 23) unmittelbar für dieses System $\left(\frac{\Pi_m(Y_r)}{|\Pi_{m_1}(Y_{r_1})|}\right)$ die Koeffizientenmatrix $(b'_{i\varkappa})$, wenn die Koeffizientenmatrix des Systems $\Pi_m(Y_r)$ bekannt ist, zu

$$(b'_{i\varkappa}) = (b_{i\varkappa}) - \left(\sum_{r_1=1}^{m_1} \frac{\pi}{n_{r_1}} \sum_{\lambda=1}^{n_r} a^{r_1}_{\lambda\lambda}\right),$$

wobei $\pi = n_1 \cdot n_2 \ldots n_m$ ist.

Desgleichen erhalten wir neue Systeme $F_{i\varkappa}$ aus $\Pi_m(Y_r)$, wenn wir in den Systemen (Y_r) die Elemente durch ihre Abgeleiteten er-

setzen, sofern nur die Determinante der Systeme von Null verschieden bleibt.

Sind die sämtlichen Systeme (A_r) einander gleich, so erhalten wir das System $\boldsymbol{\Pi}_m(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Y} \times \cdots \times \boldsymbol{Y}$, bei dem wir also bloß die oberen Indizes fortzulassen brauchen.

§ 5.

Systeme der Potenztransformation.

In diesem Paragraphen werden wir dem System

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

ein System

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_{i\varkappa}}{dx} = (z_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})$$

wie folgt zuordnen:

Es bedeute $C_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ die Anzahl der Permutationen von m Elementen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$, so daß, wenn unter den letzteren $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_\tau$ Elemente je unter sich gleich sind, bekanntlich

$$C_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = \frac{m!}{\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots\sigma_\tau!}$$

ist. Dann soll ein Element der neuen Matrix von der Form sein

$$\text{(1)} \qquad \sum_\beta y_{\alpha_1\beta_1}\cdot y_{\alpha_2\beta_2}\cdot\cdots\cdot y_{\alpha_m\beta_m},$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ m Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots n$ bedeuten und jede dieser Zahlen auch mehrfach auftreten kann. Die Summation $\sum\limits_\beta$ soll sich über die $C_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ Permutationen von Elementen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ erstrecken, wobei die letzteren auch nur Zahlen aus der Reihe $1, 2 \cdots n$ sind, von denen jede mehrfach auftreten darf.

Um die Elemente der Matrix näher zu bezeichnen, bilde man sich sämtliche Kombinationen $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$ mit Wiederholung der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu je m, deren Anzahl bekanntlich $\mu = \binom{n+m-1}{m}$ ist. Dieselben seien in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge gebracht. Sind in dieser Anordnung $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$ der Ate, $[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]$ der Bte Term, so soll das Glied

$$\sum_\beta y_{\alpha_1\beta_1}\cdot y_{\alpha_2\beta_2}\cdot\cdots\cdot y_{\alpha_m\beta_m},$$

worin $\sum\limits_\beta$ die oben angegebene Bedeutung hat, mit $z^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ oder kurz

mit $z^{(m)}_{AB}$ bezeichnet werden. Aus diesen μ^2 Elementen bilden wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} z^{(m)}_{11} & z^{(m)}_{12} & \cdots & z^{(m)}_{1\mu} \\ z^{(m)}_{21} & z^{(m)}_{22} & \cdots & z^{(m)}_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^{(m)}_{\mu 1} & z^{(m)}_{\mu 2} & \cdots & z^{(m)}_{\mu\mu} \end{pmatrix},$$

die wir auch kurz mit $P_m(Y)$ bezeichnen und nach Herrn A. Hurwitz die m-te Potenztransformation[1]) nennen.

Da erstens[2]) $|P_m(Y)| = |Y|^{\binom{n+m-1}{m}} \neq 0$ und zweitens[2]), wenn (Y) in $(C)(Y)$ übergeht, $P_m(Y)$ sich in $P_m(C)P_m(Y)$ transformiert, so sind für diese Matrix die Bedingungen des Satzes § 1, II erfüllt, weshalb die Elemente derselben ein Differentialsystem befriedigen, dessen Koeffizienten rationale Funktionen der Elemente $a_{i\varkappa}$ sind.

Diese Matrix $P_m(Y) = (z^{(m)}_{AB})$ sei die Integralmatrix unseres Systems (B). Ein Glied der Koeffizientenmatrix werde entsprechend mit $b^{(m)}_{AB}$ bezeichnet, so daß (B) die Form annimmt

(B′) $$\left(\frac{dz^{(m)}_{AB}}{dx}\right) = (z^{(m)}_{AB})(b^{(m)}_{AB}).$$

Die Berechnung der Matrix $(b^{(m)}_{AB})$ gestaltet sich wie folgt:

Lassen wir der Kürze halber in $z^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ den Zeilenindex $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$, von dem ja in Gleichung (B′) die Größen $b^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ unabhängig sind, weg, so ergibt sich aus (1)

$$z_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = \sum_{\beta} y_{\beta_1}\cdot y_{\beta_2}\cdot\cdots\cdot y_{\beta_m} = \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_s!}\, y^{\alpha_1}_{\gamma_1} y^{\alpha_2}_{\gamma_2}\cdots y^{\alpha_s}_{\gamma_s},$$

wenn unter den Elementen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ je α_1 gleich γ_1, α_2 gleich $\gamma_2, \cdots \alpha_s$ gleich γ_s sind.

Durch Differentiation dieser Gleichung unter Verwendung des Systems

(A) $$\frac{dy_\gamma}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\gamma}$$

findet man

(2) $$\begin{cases} \dfrac{dz_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}}{dx} = \dfrac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_s!}\dfrac{d}{dx}\left(y^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot y^{\alpha_2}_{\gamma_2}\cdots y^{\alpha_s}_{\gamma_s}\right) \\ \quad = \displaystyle\sum_{r=1}^{s} \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_r!\cdots\alpha_s!}\cdot\alpha_r y^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot y^{\alpha_2}_{\gamma_2}\cdots y^{\alpha_r-1}_{\gamma_r}\cdots y^{\alpha_s}_{\gamma_s}\frac{dy_{\gamma_r}}{dx} \\ \quad = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{r=1}^{s}\frac{m!\,\alpha_r}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_r!\cdots\alpha_s!}\, y^{\alpha_1}_{\gamma_1}\cdot y^{\alpha_2}_{\gamma_2}\cdots y^{\alpha_r-1}_{\gamma_r}\cdots y^{\alpha_s}_{\gamma_s}\, y_\lambda a_{\lambda\gamma_r}. \end{cases}$$

1) Hurwitz, Math. Ann. 45, 390 (1894). 2) Pascal, a. a. O. S. 147.

Daraus folgt, daß der Koeffizient von

$$\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_r!\cdots\alpha_s!}\,y_{\gamma_1}^{\alpha_1}\cdot y_{\gamma_2}^{\alpha_2}\cdots y_{\gamma_s}^{\alpha_s} \tag{3}$$

den Wert hat (wenn wir in (2) $\lambda=\gamma_r$ setzen)

$$\sum_{r=1}^{s}\alpha_r\cdot a_{\gamma_r\gamma_r}. \tag{3'}$$

Weiterhin wird der Koeffizient von

$$\frac{m!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots(\alpha_p+1)!\cdots(\alpha_r-1)!\cdots\alpha_s!}\cdot y_{\gamma_1}^{\alpha_1}\cdot y_{\gamma_2}^{\alpha_2}\cdots y_{\gamma_p}^{\alpha_p+1}\cdots y_{\gamma_r}^{\alpha_r-1}\cdots y_{\gamma_s}^{\alpha_s} \tag{4}$$

gleich

$$(\alpha_p+1)a_{\gamma_p\gamma_r}, \tag{4'}$$

wenn γ_p eine der Zahlen $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_{r-1},\gamma_{r+1},\cdots\gamma_s$ bedeutet. Schließlich ist der Koeffizient von

$$\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots(\alpha_r-1)!\cdots\alpha_s!}\,y_{\gamma_1}^{\alpha_1}\cdot y_{\gamma_2}^{\alpha_2}\cdots y_{\gamma_r}^{\alpha_r-1}\cdots y_{\gamma_s}^{\alpha_s}\cdot y_{\gamma_q} \tag{4a}$$

gleich

$$a_{\gamma_q\gamma_r}: \tag{4a'}$$

wenn γ_q mit keiner der Zahlen $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_s$ übereinstimmt.

Nun folgt aber aus (B′)

$$\frac{dz_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}}{dx}=\sum z_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\,b_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}, \tag{2a}$$

wobei sich die Summation über sämtliche Kombinationen $[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]$ mit Wiederholung der Zahlen $1,2,\cdots n$ zu erstrecken hat. Aus der Identität von (2a) mit (2) ergibt sich unter Berücksichtigung von (3), (3′), (4), (4′), (4a) und (4a′)

$$b_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}^{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}=a_{\beta_1\beta_1}+a_{\beta_2\beta_2}+\cdots+a_{\beta_m\beta_m},$$

(5) $\begin{cases} b_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=(\mu+1)\,a_{\alpha_p\beta_p}, & \textit{wenn } \alpha_p\neq\beta_p \textit{ ist, während die übrigen Elemente } \alpha_i=\beta_i\,(i=1,2\cdots p-1,p+1,\cdots m) \textit{ und das Element } \alpha_p\ \mu\textit{-mal in } [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m] \textit{ enthalten ist,} \\ b_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}=0, & \textit{wenn zwei oder mehr Elemente } \alpha_p\neq\beta_p \textit{ sind.} \end{cases}$

Führen wir dies für den Fall $n=2$ und $m=3$ aus, so ergibt sich die Koeffizientenmatrix $(b_{AB}^{(m)})$ nach (5), sofern in einem Term $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$ die Ungleichungen $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\alpha_m$ gelten und $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$

vor $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ steht, wenn die erste nicht verschwindende Differenz $\beta_i - \alpha_i$ positiv ist:

$$(5a) \qquad \left(b^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}\right) = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 2a_{11} + a_{22} & 2a_{12} & 0 \\ 0 & 2a_{21} & a_{11} + 2a_{22} & a_{12} \\ 0 & 0 & 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten ferner das Differentialgleichungssystem (B′) für diesen Fall:

$$(B) \qquad \frac{dz_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}}{dx} = z_{111}\, b^{1\ 1\ 1}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} + z_{112}\, b^{1\ 1\ 2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} + z_{122}\, b^{1\ 2\ 2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} + z_{222}\, b^{2\ 2\ 2}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}.$$

Hierbei ist

$$z_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} = C_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot y_{\beta_1} \cdot y_{\beta_2} \cdot y_{\beta_3},$$

und die Größen y_β befriedigen das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 a_{11} + y_2 a_{21} \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 a_{12} + y_2 a_{22}. \end{cases}$$

Vermittels dieses Systems erhalten wir also direkt

$$\frac{dz_{111}}{dx} = \frac{dy_1^3}{dx} = 3(y_1^3 a_{11} + y_1^2 y_2 a_{21})$$
$$= z_{111} \cdot 3a_{11} + z_{112} \cdot a_{21},$$

$$\frac{dz_{112}}{dx} = \frac{3!}{2!} \frac{d\, y_1^2 y_2}{dx} = 3(2y_1^2 y_2 a_{11} + 2y_1 y_2^2 a_{21} + y_1^3 a_{12} + y_1^2 y_2 a_{22})$$
$$= z_{111} \cdot 3a_{12} + z_{112}(2a_{11} + a_{22}) + z_{122} \cdot 2a_{21},$$

$$\frac{dz_{122}}{dx} = \frac{3!}{2!} \frac{dy_1 y_2^2}{dx} = 3(y_1 y_2^2 a_{11} + y_2^3 a_{21} + 2y_1^2 y_2 a_{12} + 2y_1 y_2^2 a_{22})$$
$$= z_{112} \cdot 2a_{12} + z_{122}(a_{11} + 2a_{22}) + z_{222} \cdot 3a_{21},$$

$$\frac{dz_{222}}{dx} = \frac{dy_2^3}{dx} = 3(y_1 y_2^2 a_{12} + y_2^3 a_{22})$$
$$= z_{122} \cdot a_{12} + z_{222} \cdot 3a_{22}.$$

Unter Berücksichtigung von (5a) ergibt sich die Übereinstimmung dieses Gleichungssystems mit (B′).

In ganz analoger Weise wie im vorhergergehenden Paragraphen finden wir für das System $\left(\dfrac{P_m(Y)}{|P_{m_1}(Y)|}\right)$ die Koeffizientenmatrix $\left(\beta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}\right)$ aus dem System $\left(b^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}\right)$ durch die Gleichung

$$\left(\boldsymbol{\beta}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}\right) = \left(\boldsymbol{b}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}\right) - \binom{n + m_1 - 1}{m_1 - 1} \left(\sum_{\lambda=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\lambda\lambda}\right).$$

§ 6.

Systeme der Operation $G_m(Y)$.

Wir ordnen hier dem System

(A) $$\left(\frac{d y_{i\varkappa}}{d x}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}),$$

ein System

(B) $$\left(\frac{d z_{i\varkappa}}{d x}\right) = (z_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}),$$

wie folgt, zu:

Um die Integrale $z_{i\varkappa}$ dieses Systems passend bezeichnen zu können, bilde man sich sämtliche n^m Variationen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ mit Wiederholung der Elemente $1, 2, \cdots n$ zu je m. Unter diesen Stellungen sind sicherlich alle Kombinationen mit Wiederholung der Elemente $1, 2, \cdots, n$ zu je m enthalten, bei noch willkürlicher Wahl der Reihenfolge der Elemente in den einzelnen Kombinationen. Wir treffen hierüber die spezielle Festsetzung, daß die Elemente eines solchen Terms $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ in ihrer natürlichen Reihenfolge $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_m$ stehen sollen und bezeichnen eine derartige Kombination mit $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$; ihre Anzahl beträgt $\binom{n+m-1}{m}$. Weiterhin enthalten jene n^m Stellungen auch sämtliche Kombinationen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ ohne Wiederholung, sofern nur die Elemente eines solchen Terms nicht in derselben Reihenfolge wie in den Kombinationen $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ aufeinanderfolgen. Wir wollen über diese im speziellen so verfügen, daß die $m-1$ ersten Elemente einer solchen Stellung $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1} \alpha_m$ in ihrer natürlichen Reihenfolge $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{m-1}$ stehen, während das letzte Element α_m zwar kleiner ist als das vorhergehende α_{m-1}, aber doch noch größer als alle vor diesem stehenden Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-2}$. Wir wollen diese Reihenfolge charakterisieren, durch $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{m-1} > \alpha_m$ und eine solche Kombination mit $\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$ bezeichnen; bekanntlich gibt es deren $\binom{n}{m}$. Läßt man aus den n^m Variationen $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ mit Wiederholung die $\binom{n+m-1}{m}$ Kombinationen $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ mit Wiederholung und die $\binom{n}{m}$ Kombinationen $\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$ ohne Wiederholung weg, so bleiben $\lambda = n^m - \binom{n+m-1}{m} - \binom{n}{m}$ Stellungen der Elemente $1, 2 \cdots n$ übrig, die wir mit $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ bezeichnen wollen. Ist keine bestimmte der drei Arten von Stellungen gemeint, so schreiben wir wohl auch einfach $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, so daß letztere Schreibweise beliebig entweder $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ oder $\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$ oder $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ bedeutet.

Bringen wir nun die Terme $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge und sei in dieser Anordnung $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$

der A-te, $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ der B-te Term, sei ferner unter $y^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}$ das Produkt $y_{\alpha_1 \beta_1} \cdot y_{\alpha_2 \beta_2} \cdot \cdots \cdot y_{\alpha_m \beta_m}$ verstanden, so soll die Differenz

$$(1) \qquad y^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} - y^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}$$

auch mit $z^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]}$ oder kurz mit $z^{(m)}_{AB}$ bezeichnet sein. Dabei bedeutet $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ eine Permutation von $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ und zwar soll, wenn unter den Elementen β_i $(i = 1, 2, \cdots m)$ gewisse einander gleich sind (Fall I), $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \equiv (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)$ gesetzt werden. Sind aber $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ sämtlich voneinander verschieden (Fall II), so unterscheiden wir zwischen den geraden Permutationen $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ (Fall IIa), bei denen es also einer geraden Anzahl von Umstellungen bedarf, um die Permutation $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ in $(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)$ zu verwandeln, und den ungeraden Permutationen (Fall IIb), die mithin zu demselben Zweck eine ungerade Anzahl von Umstellungen benötigen. Im Falle IIa setzen wir $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \equiv (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)$, im Falle IIb sei $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \equiv \{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m\}$, wo das Identitätszeichen so zu verstehen ist, daß in den beiden Termen jeweils die gleichstelligen Elemente einander gleich sind, während $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \sim \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ besagen soll, daß der Term $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ eine Permutation von $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ ist; schließlich möge $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ andeuten, daß die beiden Terme gleichzeitig gerade oder ungerade Permutationen voneinander sind; sollten einige der Elemente einander gleich sein, so ist $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \cong \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$.

Aus den λ^2 wohl definierten Größen $z^{(m)}_{AB}$ bilde man jetzt eine neue Matrix

$$\begin{pmatrix} z^{(m)}_{11} & z^{(m)}_{12} & \cdots\cdots & z^{(m)}_{1\lambda} \\ z^{(m)}_{21} & z^{(m)}_{22} & \cdots\cdots & z^{(m)}_{2\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ z^{(m)}_{\lambda 1} & z^{(m)}_{\lambda 2} & \cdots\cdots & z^{(m)}_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

die auch kurz mit $G_m(Y)$ bezeichnet sei.

Diese Matrix $G_m(Y) = (z^{(m)}_{AB})$ sei die Integral-Matrix unseres Systems (B). Bezeichnet man analog die Elemente der Koeffizientenmatrix mit $b^{(m)}_{AB}$, so geht (B) über in

$$(\mathrm{B}') \qquad \left(\frac{d\, z^{(m)}_{AB}}{d x}\right) = (z^{(m)}_{AB})\,(b^{(m)}_{AB}).$$

Wir gehen jetzt näher auf die Eigenschaften von $G_m(Y)$ ein und zwar beweisen wir zunächst

Satz 1. Sind $(C) = (c_{\alpha\beta})$ und $(D) = (d_{\alpha\beta})$ zwei Matrices gleichen Grades, so ist

$$G_m(C)\, G_m(D) = G_m(CD).$$

Sind $(C) = (c_{\alpha\beta})$ und $(D) = (d_{\alpha\beta})$ zwei Matrices vom Grade n, so wird nach (1) bei analoger Bezeichnung

$$(2) \qquad \begin{cases} G_m(C) = \left(c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\right) \\ G_m(D) = \left(d^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - d^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\right), \end{cases}$$

und da

$$(CD) = \left(\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\alpha\lambda}\, d_{\lambda\beta}\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2 \cdots n)$$

ist, so wird schließlich

$$(3) \qquad G_m(CD) = \left(\left(\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\alpha\lambda}\, d_{\lambda\beta}\right)^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - \left(\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\alpha\lambda}\, d_{\lambda\beta}\right)^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\right),$$

worin $\left(\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\alpha\lambda}\, d_{\lambda\beta}\right)^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ bedeutet, daß das Element in der Klammer statt α, β nacheinander die Indices $\alpha_1, \beta_1;\ \alpha_2, \beta_2;\ \cdots\cdots;\ \alpha_m, \beta_m$ anzunehmen hat und daß aus diesen Ausdrücken das Produkt zu bilden ist:

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\alpha\lambda}\, d_{\lambda\beta}\right)^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = \sum_{\lambda_1=1}^{n} c_{\alpha_1\lambda_1} d_{\lambda_1\beta_1} \cdot \sum_{\lambda_2=1}^{n} c_{\alpha_2\lambda_2} d_{\lambda_2\beta_2} \cdot \cdots \cdot \sum_{\lambda_m=1}^{n} c_{\alpha_m\lambda_m} d_{\lambda_m\beta_m}$$

$$= \sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} c_{\alpha_1\lambda_1} c_{\alpha_2\lambda_2} \cdots c_{\alpha_m\lambda_m} \cdot d_{\lambda_1\beta_1} d_{\lambda_2\beta_2} \cdots d_{\lambda_m\beta_m}$$

$$= \sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} c^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\, d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}. \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m = 1, 2, \cdots n)$$

Es geht daher Gleichung (3) über in

$$(3\text{a}) \quad G_m(CD) = \left(\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\, d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\, d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\right).$$

Desgleichen folgt aus (2)

$$(2\text{a}) \qquad G_m(C)\, G_m(D) =$$

$$\left\{\sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} \left(c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} - c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\right) \cdot \left(d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\right)\right\},$$

wobei die Summation $\sum\limits_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}$ über sämtliche Kombinationen $[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]$ der Zahlen $1, 2, \cdots n$ zu erstrecken ist. Rechnen wir in (2a) das Produkt aus und berücksichtigen in (3a), daß bei analoger symbolischer Bezeichnung

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m} = \sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} + \sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)} + \sum_{\{\lambda_1\lambda_1\cdots\lambda_m\}}$$

ist, so erhalten wir

(2b) $$G_m(C)\,G_m(D) =$$
$$\Big(\sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\Big[c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\,d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\,d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$$
$$+ c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\Big(d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} - d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\Big)\Big]\Big)$$

(3b) $$G_m(CD) =$$
$$\Big(\sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\Big(c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\,d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\,d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\Big)$$
$$+ \sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\Big\{c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\Big(d^{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - d^{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\Big)\Big\}$$
$$+ \sum_{\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}}\Big\{c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}}\Big(d^{\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - d^{\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}\Big)\Big\}\Big).$$

Es sind zunächst unmittelbar die beiden ersten Ausdrücke $\sum\limits_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}$ in (2b) und (3b) einander gleich. Um auch die Identität der übrigen Glieder einzusehen, beachten wir das folgende: Die Größen $d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ ändern sich als Produkte $d_{\lambda_1\beta_1}\cdot d_{\lambda_2\beta_2}\cdot\cdots d_{\lambda_m\beta_m}$ nicht, wenn gleichzeitig dieselben Transpositionen in $\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_m$ und $\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m$ vorgenommen werden; also

(4) $$d^{\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}}_{\beta_{\gamma_1}\beta_{\gamma_2}\cdots\beta_{\gamma_m}} = d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}. \qquad (\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m \sim 1\,2\cdots m)$$

Wir bilden ferner sämtliche geraden bzw. ungeraden Permutationen eines Terms $\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_m$, wobei, im Falle einige Elemente λ untereinander gleich sind, die Permutationen sämtlich als gerade gelten sollen (da in (1) Fall I mit Fall IIa übereinstimmt); alsdann erkennen wir, daß sich, wenn wir mit jedem solchen Term die gleichen Umstellungen der Elemente und zwar in gerader Zahl vornehmen, die geraden bzw. ungeraden Permutationen sämtlich wiederherstellen. Aus diesen beiden Bemerkungen ergibt sich die Gleichung

(5) $$\sum_{\lambda_\gamma} d^{\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} = \sum_{\lambda_\gamma} d^{\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}, \quad (\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m} = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m)$$

wo sich die Summation $\sum\limits_{\lambda_\gamma}$ über sämtliche Permutationen $\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}$ $=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ erstreckt.

Wir betrachten jetzt in Gleichung (2b) etwas genauer die Summe

(6) $$S = \sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}\Big\{c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\Big(d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} - d^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\Big)\Big\},$$

zu der wir die Glieder

$$+\sum_{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}\left\{c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}\left(d^{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}-d^{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)\right\} \qquad (\lambda=1,2,\cdots n)$$

hinzufügen, die den Wert Null haben, da nach (4)

$$d^{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}=d^{(\lambda\lambda\cdots\lambda)}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$$

ist. Es kommen jetzt demnach in S Permutationen von allen Termen $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ vor, d. h. es sind sämtliche Terme $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ darin enthalten, wenn wir auf die Stellung der Elemente keine Rücksicht nehmen. Man erhält alle Glieder von (6), wenn man eine Anordnung $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ nimmt, zunächst über ihre geraden $\left(\sum_{[\lambda_\gamma]}\right)$, dann über ihre ungeraden Permutationen $\left(\sum_{[\lambda'_\gamma]}\right)$, die unter den Kombinationen $[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]$ vorkommen, summiert und schließlich noch die Summe von sämtlichen Termen $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ bildet, also symbolisch

$$\sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\sum_{[\lambda_\gamma]}+\sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\sum_{[\lambda'_\gamma]}=\sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\left(\sum_{[\lambda_\gamma]}+\sum_{[\lambda'_\gamma]}\right);$$

hierbei ist noch zu beachten, daß, wenn eine Permutation von $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ unter den $[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]$ nicht vorkommen sollte, was nur bei Gleichheit aller Elemente eintritt, die zweiten Summationszeichen einfach wegzulassen sind. Mithin wird

$$\text{(6a)}\qquad S=\sum_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\left\{\sum_{[\lambda_\gamma]}c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)}\left(d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}-d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{[\lambda'_\gamma]}c^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}}\left(d^{[\lambda'_{\gamma_1}\lambda'_{\gamma_2}\cdots\lambda'_{\gamma_m}]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}-d^{[\lambda'_{\gamma_1}\lambda'_{\gamma_2}\cdots\lambda'_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)\right\}.$$

Da nun von sämtlichen geraden bzw. ungeraden Permutationen $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ unter den geraden bzw. ungeraden Permutationen $[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]$ einzig nur die Permutation $(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ bzw. $\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}$ fehlt, so erhalten wir nach (5), da stets $[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]=\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ ist:

$$\text{(5a)}\qquad \sum_{[\lambda_\gamma]}d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}+d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}=\sum_{[\lambda_\gamma]}d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}+d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$$

oder

$$\text{(5b)}\qquad \sum_{[\lambda_\gamma]}\left(d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}-d^{[\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\cdots\lambda_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)=d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}-d^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m},$$

wo $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m=(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m)$ oder $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m=\{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m\}$, je

nachdem über die geraden oder ungeraden Permutationen $\sum\limits_{[\lambda_\gamma]}$ summiert wird. Folglich geht S nach (6a) und nach (5b) über in

$$S = \sum_{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)} \Big\{ c^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)} \Big(d^{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} - d^{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} \Big) + c^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m\}} \Big(d^{\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m\}}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} - d^{\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m\}}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} \Big) \Big\}. \tag{6b}$$

Da unter den Termen $\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m\}$ sicherlich keine vorkommen, die mehrere Elemente gleich haben, so ist für diese Summation

$$\sum_{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)} = \sum_{\{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m\}},$$

woraus die Identität der Gleichungen (2b) und (3b) erhellt.

Unmittelbar aus (1) ergibt sich ferner

Satz 2. Ist C die Einheitsmatrix, so ist $G_m(C)$ es ebenfalls.

Aus Satz 1 und 2 folgt

Satz 3. Die Operation G_m der reziproken Matrix von C ist gleich der reziproken Matrix der Operation G_m von C, also

$$\boldsymbol{G_m(C^{-1}) = (G_m(C))^{-1}}.$$

Wir beweisen jetzt

Satz 4. Man erhält die $\lambda = n^m - \binom{n+m-1}{m} - \binom{n}{m}$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $G_m(C)$, indem man die sämtlichen den Anordnungen $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ entsprechenden λ Produkte $\varrho^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]} = \varrho_{\alpha_1} \cdot \varrho_{\alpha_2} \cdots \varrho_{\alpha_m}$ der n Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ der charakteristischen Gleichung von C bildet.

Ist $C = (c_{\alpha\beta})$ eine Matrix n. Grades, deren charakteristische Gleichung $|c_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\varrho| = 0$ die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ habe, so sind, wenn die Elemente von C als variabel gelten, $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ untereinander verschieden; daher gibt es stets eine Matrix Q, daß

$$Q\,C\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} \varrho_1 & & & \\ & \varrho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varrho_n \end{pmatrix} = (\varrho_\alpha \delta_{\alpha\beta})$$

wird. Nun ist ferner nach Satz 1 und 3

$$G_m(Q\,C\,Q^{-1}) = G_m(Q)\,G_m(C)\,G_m(Q))^{-1}$$

und nach (1)

$$G_m(Q\,C\,Q^{-1}) = G_m(\varrho_\alpha \delta_{\alpha\beta}) = \varrho^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]} \big\{ \delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} - \delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} \big\}.$$

Da nun

$$\delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} = \delta_{\alpha_1 \beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2 \beta_2} \ldots \cdot \delta_{\alpha_m \beta_m}$$

nur dann von Null verschieden ist, wenn $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_m = \beta_m$ d. h. $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m$ ist, so folgt

$$\delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} = 0.$$

Mithin wird

$$G_m(Q)\, G_m(C) (G_m(Q))^{-1} = (\varrho^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}\, \delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]}),$$

woraus sich die Richtigkeit dieses Satzes ergibt.

Aus Satz 4 folgt

Satz 5. *Die Determinante von* $G_m(C)$ *ist die* $\frac{m \cdot \lambda}{n}$*-te Potenz der Determinante von* C, *also*

$$|G_m(C)| = |C|^{\frac{m \cdot \lambda}{n}}.$$ [1]

Wir kehren jetzt zu unserm System (B′) zurück, dessen Integralmatrix $G_m(Y) = (z^{(m)}_{AB})$ nach Satz 1 und Satz 5 ein System $F_{i\varkappa}$ des § 1 darstellt. Es sind daher die Größen $b^{(m)}_{AB}$ der Koeffizientenmatrix rationale Funktionen der $a_{i\varkappa}$, die wir jetzt berechnen wollen.

Es ist zunächst

(7) $$(G_m(Y))^{-1} \left(\frac{d\, G_m(Y)}{dx}\right) = (b^{(m)}_{AB});$$

ferner nach Satz 3

(8) $$(G_m(Y))^{-1} = G_m(Y^{-1}).$$

Nun ist aber

(9) $$(Y)^{-1} = (y_{\alpha\beta})^{-1} = (\overline{Y_{\beta\alpha}}), \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$$

wenn $\overline{Y_{\alpha\beta}} \cdot |Y|$ die Adjungierte von $y_{\alpha\beta}$ bedeutet. Wir erhalten daher aus (1), (8) und (9)

$$(G_m(Y))^{-1} = \left(\overline{Y^{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]}_{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}} - \overline{Y^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}_{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}}\right),$$

wo $\overline{Y^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}} = \overline{Y_{\beta_1 \alpha_1}} \cdot \overline{Y_{\beta_2 \alpha_2}} \cdots \overline{Y_{\beta_m \alpha_m}}$ ist.

Versteht man unter $y^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \underline{\alpha_\mu} \ldots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \underline{\beta_\mu} \ldots \beta_m}$ das Produkt

$y_{\alpha_1 \beta_1} \cdot y_{\alpha_2 \beta_2} \cdots \frac{d y_{\alpha_\mu \beta_\mu}}{dx} \cdots y_{\alpha_m \beta_m}$ und sei $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_\mu \cdots \beta_m] \equiv \beta_{\delta_1} \beta_{\delta_2} \cdots \beta_{\delta_\mu} \cdots \beta_{\delta_m}$,

so erhalten wir durch Differentiation von Gleichung (1)

(1 a) $$\left(\frac{d\, G_m(Y)}{dx}\right) = \left(\sum_{\mu=1}^{m} y^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \underline{\alpha_\mu} \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \underline{\beta_\mu} \ldots \beta_m]} - y^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \underline{\alpha_{\delta_\mu}} \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \underline{\beta_{\delta_\mu}} \ldots \beta_m]}\right).$$

---

1) Vgl. J. Schur, Berliner Dissertation (1901) S. 12.

Daraus folgt nach (7)

$$
(7a)\quad
\begin{cases}
\left(b^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\right)=\left\{\left(\overline{Y^{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}-\overline{Y^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}\right)\right. \\
\qquad\left.\cdot\left(\sum_{\mu=1}^{m} y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\underline{\alpha_\mu}\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_\mu}\ldots\beta_m]}-y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\underline{\alpha_{\delta_\mu}}\ldots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_{\delta_\mu}}\ldots\beta_m}\right)\right\} \\
=\sum_{\mu=1}^{m}\left\{\left(\overline{Y^{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}-\overline{Y^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}\right)\right. \\
\qquad\left.\cdot\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\underline{\alpha_\mu}\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_\mu}\ldots\beta_m]}-y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\underline{\alpha_{\delta_\mu}}\ldots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_{\delta_\mu}}\ldots\beta_m}\right)\right\} \\
=\sum_{\mu=1}^{m}\left[\sum_{[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m]}\left(\overline{Y^{[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m]}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}-\overline{Y^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}\right)\right. \\
\qquad\left.\left(y^{[\lambda_1\lambda_2\ldots\underline{\lambda_\mu}\ldots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_\mu}\ldots\beta_m]}-y^{[\lambda_1\lambda_2\ldots\underline{\lambda_{\delta_\mu}}\ldots\lambda_m]}_{\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_{\delta_\mu}}\ldots\beta_m}\right)\right]
\end{cases}
$$

Wir vergleichen jetzt (7a) mit (2a). Für die Größen y, die den in (2a) stehenden Größen d entsprechen, gilt zunächst Gleichung (4). An Stelle von Gleichung (5) tritt analog

$$
(5^*)\qquad \sum_{\lambda_\gamma} y^{\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\ldots\underline{\lambda_{\gamma_\mu}}\ldots\lambda_{\gamma_m}}_{|\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_\mu}\ldots\beta_m|}=\sum_{\lambda_\gamma} y^{\lambda_{\gamma_1}\lambda_{\gamma_2}\ldots\underline{\lambda_{\gamma_{\delta_\mu}}}\ldots\lambda_{\gamma_m}}_{\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_{\delta_\mu}}\ldots\beta_m},
$$

wobei

$$
|\beta_1\beta_2\ldots\beta_\mu\ldots\beta_m|\equiv\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_\mu}\ldots\beta_{\delta_m}=\beta_1\beta_2\ldots\beta_m
$$

bedeuten möge und $\sum\limits_{\lambda_\gamma}$ ebenso wie in (5) zu verstehen ist.

Es bleiben mithin alle Schlüsse richtig, die wir zum Beweise des Satzes 1 anwendeten, wenn wir in $y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}$ das an μ-ter, in $y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$, das an δ_μ-ter Stelle stehende Glied differentiieren. Aus der Identität zwischen (2a) und (3a) folgt daher, daß (7a) übergeht in

$$
(7b)\qquad \left(b^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\right)=\sum_{\mu=1}^{m}\left\{\sum_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}\left(\overline{Y^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}\,y^{\lambda_1\lambda_2\ldots\underline{\lambda_\mu}\ldots\lambda_m}_{[\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_\mu}\ldots\beta_m]}\right.\right.
$$
$$
\left.\left.-\overline{Y^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}}\,y^{\lambda_1\lambda_2\ldots\underline{\lambda_{\delta_\mu}}\ldots\lambda_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\underline{\beta_{\delta_\mu}}\ldots\beta_m}\right)\right\}.\qquad (\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m=1,2,\ldots n)
$$

Beachten wir noch, daß nach (A) und bekannten Determinantensätzen

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum_{\lambda_\mu=1}^{n} \overline{Y_{\lambda_\mu \alpha_\mu}}\, y_{\lambda_\mu \beta_\mu} = \delta_{\alpha_\mu \beta_\mu} \\ \sum_{\lambda_\mu=1}^{n} Y_{\lambda_\mu \alpha_\mu} \frac{d y_{\lambda_\mu \beta_\mu}}{dx} = a_{\alpha_\mu \beta_\mu} \end{cases}$$

ist, so erhalten wir (vgl. § 4 (17) und (17a))

$$(7\,c)\qquad \left(b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]}\right) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-1} \alpha_{\mu+1} \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\mu-1} \beta_{\mu+1} \ldots \beta_m]} a_{\alpha_\mu \beta_\mu} - \delta^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\delta_\mu - 1} \alpha_{\delta_\mu + 1} \ldots \alpha_m]}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\delta_\mu - 1} \beta_{\delta_\mu + 1} \ldots \beta_m} a_{\alpha_{\delta_\mu} \beta_{\delta_\mu}} \right\}.$$

Aus (7c) folgt mit Beibehaltung unserer Symbole für die Elemente unserer Matrix

$$\left(b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]}\right)$$

I. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m] \sim [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$ *d. h.* $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]$ *eine Permutation von* $[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$:

1. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m] \equiv [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = a_{\alpha_1 \alpha_1} + a_{\alpha_2 \alpha_2} + \cdots a_{\alpha_m \alpha_m}.$$

2. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m] \not\equiv [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = 0.$$

II. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m] \not\sim [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$ *d. h.* $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]$ *keine Permutation von* $[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$:

ein Element $\alpha_\mu \neq \beta_\mu$; *in* $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m$ *stehe* β_μ *an* γ*-ter Stelle.*

1. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\gamma-1} \alpha_{\gamma+1} \ldots \alpha_m] \equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\gamma-1} \beta_{\gamma+1} \ldots \beta_m$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = a_{\alpha_\mu \beta_\mu} - a_{\alpha_\gamma \beta_\mu} = 0.$$ [1])

2. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\gamma-1} \alpha_{\gamma+1} \ldots \alpha_m] \not\equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\gamma-1} \beta_{\gamma+1} \ldots \beta_m$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = a_{\alpha_\mu \beta_\mu}.$$

---

1) Es sei $[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\mu-1} \beta_\mu \beta_{\mu+1} \ldots \beta_m] \equiv \beta_{\delta_1} \beta_{\delta_2} \ldots \beta_{\delta_\mu - 1} \beta_{\delta_\mu + 1} \ldots \beta_{\delta_m}$; aus $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-1} \alpha_{\mu+1} \ldots \alpha_m] \equiv [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\mu-1} \beta_{\mu+1} \ldots \beta_m]$ und II, 1 folgt alsdann $\beta_{\delta_1} \beta_{\delta_2} \ldots \beta_{\delta_\mu - 1} \beta_{\delta_\mu + 1} \ldots \beta_{\delta_\gamma - 1} \beta_{\delta_\gamma + 1} \ldots \beta_m \equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\mu-1} \beta_{\mu+1} \ldots \beta_{\gamma-1} \beta_{\gamma+1} \ldots \beta_m$. Da vollkommene Identität $\beta_{\delta_1} \ldots \beta_{\delta_m} \equiv \beta_1 \ldots \beta_m$ nicht möglich, so folgt $\beta_{\delta_\gamma} = \beta_\mu$; weiter kann man noch schließen $\beta_{\delta_\gamma} = \alpha_\gamma$ und nach II, 1. $\beta_\mu = \alpha_\mu$, so daß $\alpha'_\mu = \alpha_\gamma$ wird.

III. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m] \neq [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]$; *zwei oder mehr Elemente* $\alpha_\mu \neq \beta_\mu$:

1. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\gamma-1} \alpha_{\gamma+1} \ldots \alpha_m] \equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\gamma-1} \beta_{\gamma+1} \ldots \beta_m$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = -a_{\alpha_\gamma \beta_\mu}.$$

2. $[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\gamma-1} \alpha_{\gamma+1} \ldots \alpha_m] \not\equiv \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\gamma-1} \beta_{\gamma+1} \ldots \beta_m$

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m]} = 0.$$

Wir wollen die Rechnung an dem Beispiel $n = 2$, $m = 3$ durchführen; hier wird $\lambda = 2^3 - \binom{2+2}{3} = 4$; die Permutationen $[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$ lauten [121], [211], [212], [221]. Die Koeffizientenmatrix ergibt sich nach oben

$$\begin{array}{llll}
b^{[121]}_{[121]} = a_{11} + a_{22} + a_{11} & (\mathrm{I}, 1) & b^{[211]}_{[121]} = 0 & (\mathrm{I}, 2) \\
b^{[121]}_{[211]} = 0 & (\mathrm{I}, 2) & b^{[211]}_{[211]} = a_{22} + a_{11} + a_{11} & (\mathrm{I}, 1) \\
b^{[121]}_{[212]} = -a_{12} & (\mathrm{III}, 1) & b^{[211]}_{[212]} = a_{12} & (\mathrm{II}, 2) \\
b^{[121]}_{[221]} = 0 & (\mathrm{II}, 1) & b^{[211]}_{[221]} = a_{12} & (\mathrm{II}, 2).
\end{array}$$

Berechnet man ebenso die übrigen Glieder, so erhält man

$$b^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{11} & 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} + a_{11} + a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ -a_{21} & 0 & a_{22} + a_{11} + a_{22} & 0 \\ a_{21} & a_{21} & 0 & a_{22} + a_{22} + a_{11} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\mathrm{B}_3) \qquad \frac{d\left(y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]} - y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}\right)}{dx} = \sum_{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]} \left(y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]} - y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}\right) b^{[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]}\Big).$$

Setzen wir

$$y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]} - y^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} = z^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]},$$

so wird die Integralmatrix $G_3(Y)$ für $n = 2$

$$\begin{pmatrix} z^{[121]}_{[121]} & 0 & z^{[121]}_{[212]} & 0 \\ 0 & z^{[211]}_{[211]} & z^{[211]}_{[212]} & z^{[211]}_{[221]} \\ z^{[212]}_{[121]} & 0 & z^{[212]}_{[212]} & 0 \\ z^{[221]}_{[121]} & z^{[221]}_{[211]} & 0 & z^{[221]}_{[221]} \end{pmatrix},$$

da $z^{[121]}_{[211]} = y^{[121]}_{[211]} - y^{[121]}_{112} = y_{12} y_{21} y_{11} - y_{11} y_{21} y_{12} = 0$ usw.

Wir wollen jetzt das Koeffizientensystem $\left(b^{[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]}_{[\beta_1\beta_2\beta_3]}\right)$ auf seine Richtigkeit prüfen, indem wir einige der Gleichungen (B_3) direkt aus dem System

$$\frac{dy_{11}}{dx} = y_{11}a_{11} + y_{12}a_{21} \qquad \frac{dy_{21}}{dx} = y_{21}a_{11} + y_{22}a_{21}$$

$$\frac{dy_{12}}{dx} = y_{11}a_{12} + y_{12}a_{22} \qquad \frac{dy_{22}}{dx} = y_{21}a_{12} + y_{22}a_{22}$$

berechnen; so wird

$$\frac{dz^{[121]}_{[121]}}{dx} = \frac{d\left(y^{[121]}_{[121]} - y^{[121]}_{(112)}\right)}{dx} = \frac{d(y_{11}^2 y_{22} - y_{11}y_{21}y_{12})}{dx} = 2y_{11}(y_{11}y_{22}a_{11} + y_{12}y_{22}a_{21})$$
$$+ y_{11}^2(y_{21}a_{12} + y_{22}a_{22}) - y_{11}y_{21}y_{12}a_{11} - y_{12}y_{21}y_{12}a_{21} - y_{11}y_{12}y_{21}a_{11}$$
$$- y_{11}y_{12}y_{22}a_{21} - y_{11}y_{21}y_{11}a_{12} - y_{11}y_{21}y_{12}a_{22}$$
$$= \left(y^{[121]}_{[121]} - y^{[121]}_{(112)}\right)(a_{11} + a_{22} + a_{11}) - \left(y^{[121]}_{[212]} - y^{[121]}_{(112)}\right)a_{21},$$

$$\frac{dz^{[121]}_{[212]}}{dx} = \frac{d\left(y^{[121]}_{[212]} - y^{[121]}_{(122)}\right)}{dx} = \frac{d(y_{12}^2 y_{21} - y_{11}y_{12}y_{22})}{dx} = 2y_{12}(y_{11}y_{21}a_{12} + y_{12}y_{21}a_{22})$$
$$+ y_{12}^2(y_{21}a_{11} + y_{22}a_{21}) - y_{11}y_{12}y_{22}a_{11} - y_{12}y_{12}y_{22}a_{21} - y_{11}y_{22}y_{11}a_{12}$$
$$- y_{11}y_{22}y_{12}a_{22} - y_{11}y_{12}y_{21}a_{12} - y_{11}y_{12}y_{22}a_{22} = -\left(y^{[121]}_{[121]} - y^{[121]}_{(112)}\right)a_{12}$$
$$+ \left(y^{[121]}_{[212]} - y^{[121]}_{(122)}\right)(a_{22} + a_{11} + a_{22}),$$

$$\frac{dz^{[211]}_{[211]}}{dx} = \frac{d\left(y^{[211]}_{[211]} - y^{[211]}_{(112)}\right)}{dx} = \frac{d(y_{22}y_{11}^2 - y_{21}y_{11}y_{12})}{dx} = 2y_{11}y_{22}(y_{11}a_{11} + y_{12}a_{21})$$
$$+ y_{11}^2(y_{21}a_{12} + y_{22}a_{22}) - y_{11}y_{12}y_{21}a_{11} - y_{11}y_{12}y_{22}a_{21} - y_{21}y_{12}y_{11}a_{11}$$
$$- y_{21}y_{12}y_{12}a_{21} - y_{21}y_{11}y_{11}a_{12} - y_{21}y_{11}y_{12}a_{22}$$
$$= \left(y^{[211]}_{[211]} - y^{[211]}_{(112)}\right)(a_{22} + a_{11} + a_{11}) + \left(y^{[211]}_{[221]} - y^{[211]}_{(122)}\right)a_{21},$$

$$\frac{dz^{[211]}_{[221]}}{dx} = \frac{d\left(y^{[211]}_{[221]} - y^{[211]}_{(122)}\right)}{dx} = \frac{d(y_{22}y_{12}y_{11} - y_{21}y_{12}^2)}{dx} = y_{12}y_{11}y_{21}a_{12} + y_{12}y_{11}y_{22}a_{22}$$
$$+ y_{22}y_{11}y_{11}a_{12} + y_{22}y_{11}y_{12}a_{22} + y_{22}y_{12}y_{11}a_{11} + y_{22}y_{12}y_{12}a_{21}$$
$$- y_{12}^2(y_{21}a_{11} + y_{22}a_{21}) - 2y_{12}y_{21}(y_{11}a_{12} + y_{12}a_{22}) = \left(y^{[211]}_{[211]} - y^{[211]}_{(112)}\right)a_{12}$$
$$+ \left(y^{[211]}_{[221]} - y^{[211]}_{(122)}\right)(a_{22} + a_{22} + a_{12}),$$

$$\frac{dz^{[121]}_{[211]}}{dx} = \frac{d\left(y^{[121]}_{[211]} - y^{[121]}_{(112)}\right)}{dx} = \frac{d(0)}{dx} = 0.$$

Die hier hergeleiteten Relationen erhalten wir indes auch, wenn wir in (B_3) die aus unserem allgemeinen System berechneten Koeffizienten $b^{[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]}_{[\beta_1 \beta_2 \beta_3]}$ einführen, woraus deren Richtigkeit für den Fall $m = 3$, $n = 2$ folgt.

Ein weiteres System $F_{i\varkappa}$ ist das zu $G_m(Y)$ gehörige System $(G_m(Y'))' = G'_m(Y')$.

Geht nämlich (Y) in $(C)(Y)$ über, wobei (C) eine konstante Matrix ist, so verwandelt sich $(G_m(Y'))'$ in

$$(G_m(C\,Y)')' = (G_m(Y'\,C'))' = (G_m(Y')\,G_m(C'))' = G'_m(C')\,G'_m(Y').$$

Weiterhin ist $|G'_m(Y')| = |G_m(Y')| = |Y'|^{\frac{m\lambda}{n}} = |Y|^{\frac{m\lambda}{n}} = |G_m(Y)| \neq 0$.

Da $(Y') = (y_{\beta\alpha})$ ist, so wird nach (1)

$$G_m(Y') = \left(y^{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]}_{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]} - y^{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}_{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}\right),$$

wo $G_m(Y')$ charakterisiert ist durch das Glied, das in der Zeile $A \equiv [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ und der Kolonne $B \equiv [\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ steht, mithin lautet ein Glied dieser Matrix, das in der Zeile B und der Kolonne A steht

$$y^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} - y^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]},$$

also

$$\text{(1a)} \qquad \boldsymbol{G'_m(Y') = \left(y^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} - y^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]}\right)},$$

worin genau wie bisher $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \equiv (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)$, wenn in $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ einige Elemente einander gleich (Fall I) sind, desgleichen, wenn alle voneinander verschieden und $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ eine gerade Permutation (Fall IIa) ist, endlich $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \equiv \{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$, wenn $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$ eine ungerade Permutation (Fall IIb) ist, was auch durch $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \equiv \{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)\}$ angedeutet sei.

Wir geben jetzt eine Matrix P derart an, daß

$$P\,G'_m(Y')\,P^{-1} = G_m(Y)$$

wird.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sollen wieder zwei Terme $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ und $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ als gleich ($\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$) angesehen werden, wenn beide gerade oder beide ungerade Permutationen eines Terms $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ sind, wobei alle Permutationen eines Terms $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$, in dem gewisse Elemente einander gleich sind, als gerade gelten sollen.

Die Anzahl der als gleich bezeichneten Terme sei $C'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$, so daß $C'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} = C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}$, wenn gewisse Elemente α einander gleich sind, während, wenn alle Elemente verschieden sind, $C'_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m} = \frac{C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}}{2}$ ist.

Wir setzen dann Matrix $P = \left(p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)$:

$$(10)\qquad (P)\begin{cases} p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 0, & \text{wenn } [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \neq [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]; \\ p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = -\dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}}, & \text{wenn } [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] = [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m], \\ & \text{aber } [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \not\equiv [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]; \\ p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 1 - \dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}}, & \text{wenn } [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \equiv [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]. \end{cases}$$

Daß $|P| \neq 0$ ist, geht unmittelbar daraus hervor, daß sich die zu P inverse Matrix $(P)^{-1} = \left(\pi^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right)$ angeben läßt, zu deren Berechnung wir nun übergehen.

Zunächst folgt aus

$$(P)(P)^{-1} = \left(\delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right), \quad \begin{pmatrix} \delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 1, \ [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \equiv [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m] \\ \delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 0, \ [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \not\equiv [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m] \end{pmatrix},$$

daß

$$\sum_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} \pi^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$$

oder, da nach (10) $p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]} = 0$ ist, wenn $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \neq [\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m]$,

$$(10\text{a})\qquad \sum_{[\alpha_\gamma]} p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]} \pi^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]},$$

$$\left([\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}] = [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]\right).$$

Setzen wir aus (10) für $p^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}$ die Werte ein, so wird

$$(10\text{b})\qquad -\frac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}} \sum_{[\alpha_\gamma]} \pi^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} + \pi^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \delta^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}.$$

Dies gilt für beliebiges $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$; summieren wir über die $C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} - 1$ (vgl. S. 37 unterhalb Gl. (6a)) Permutationen $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$, so erhalten wir

$$-\frac{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m} - 1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}} \sum_{[\alpha_\gamma]} \pi^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} + \sum_{[\alpha_\gamma]} \pi^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \sum_{[\alpha_\gamma]} \delta^{\alpha_{\gamma_1}\cdots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_1\cdots\beta_m]}$$

oder

$$(11)\qquad \frac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}} \sum_{[\alpha_\gamma]} \pi^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \sum_{[\alpha_\gamma]} \delta^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}.$$

Ist nun $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m] \neq [\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]$, also auch $[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}] \neq [\beta_1\cdots\beta_m]$,

so folgt $\sum\limits_{[\alpha_\gamma]} \delta^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 0$, mithin unter Berücksichtigung von (11) aus (10b)

$$\pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = 0.$$

Ist dagegen $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] = [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]$, so wird

$$\sum_{[\alpha_\gamma]} \delta^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 1$$

und mithin mit Hilfe von (11) aus (10b)

$$\begin{aligned} \pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} &= 1, \text{ wenn } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] = [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m], \\ &\qquad \text{aber } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \not\equiv [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m] \\ \pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} &= 2, \text{ wenn } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \equiv [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]. \end{aligned}$$

Folglich werden die Koeffizienten der Matrix $(P)^{-1}$

$$\text{(11a)} \quad (P)^{-1} \begin{cases} \pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = 0, \text{ wenn } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \neq [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]; \\ \pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = 1, \text{ wenn } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] = [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m], \\ \qquad\qquad \text{aber } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \not\equiv [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]; \\ \pi^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = 2, \text{ wenn } [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] \equiv [\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]. \end{cases}$$

Es wird daher, wenn wir ein Glied der Matrix $PG'_m(Y')P^{-1}$ mit $z^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}$ bezeichnen, unter Berücksichtigung von (1a), (10) und (11a)

$$z^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = \sum_{[\lambda]}\sum_{[\lambda']} p^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m]} \left(y^{[\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m]}_{[\lambda'_1\lambda'_2\ldots\lambda'_m]} - y^{\{(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m)\}}_{[\lambda'_1\lambda'_2\ldots\lambda'_m]} \right) \pi^{[\lambda'_1\lambda'_2\ldots\lambda'_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}$$

$$= \sum_{[\alpha_\gamma]}\sum_{[\beta_\delta]} p^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\ldots\alpha_{\gamma_m}]} \cdot \left(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdot\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]} \right) \pi^{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$$

$$\text{(12)} \quad = \begin{cases} -\dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}} \sum\limits_{[\alpha_\gamma]}\sum\limits_{[\beta_\delta]} \left(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]} \right) \\ -\dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}} \sum\limits_{[\alpha_\gamma]} \left(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} \right) \\ + \sum\limits_{[\beta_\delta]} \left(y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}]} \right) + y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}. \end{cases}$$

Gleichung (12) läßt sich durch folgende Überlegung vereinfachen:

Offenbar gilt die zu (5) analoge Formel

(5′) $$\sum_{\beta_\delta} y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} = \sum_{\beta_\delta} y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}, \qquad (\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m} = \{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\})$$

wo $\sum\limits_{\beta_\delta}$ dieselbe Bedeutung wie $\sum\limits_{\beta_\gamma}$ in (5) besitzt; folglich

(13) $$\sum_{\alpha_\gamma}\Big(\sum_{\beta_\delta} y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big) = \sum_{\alpha_\gamma}\Big(\sum_{\beta_\delta} y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big)$$
$$= C'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}\sum_{\beta_\delta} y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}$$

oder

(13a) $$\sum_{\alpha_\gamma}\sum_{\beta_\delta}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big) = 0;$$

ferner wird (vgl. S. 37 unterhalb Gl. (6a))

(14) $$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha_\gamma}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big) = \sum\limits_{[\alpha_\gamma]}\Big(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big) \\ \qquad + \Big(y^{[\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big) \\ \qquad = \sum\limits_{[\alpha_\gamma]}\Big(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}}\Big); \end{cases}$$

desgleichen folgt aus (13a)

(13b) $$\sum_{\alpha_\gamma}\sum_{[\beta_\delta]}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]}\Big)$$
$$+ \sum_{\alpha_\gamma}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\{(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)\}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)\}}\Big) = 0;$$

mithin aus (14), (13b) und (5) (vgl. auch (13)):

(15) $$\begin{cases} \sum\limits_{[\alpha_\gamma]}\sum\limits_{[\beta_\delta]}\Big(y^{[\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]}\Big) \\ \quad = \sum\limits_{\alpha_\gamma}\sum\limits_{[\beta_\delta]}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\dots\beta_{\delta_m}]}\Big) \\ \quad = -\sum\limits_{\alpha_\gamma}\Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{\{(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)\}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)\}}\Big) \\ \quad = -\sum\limits_{\alpha_\gamma} y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\dots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_1\beta_2\dots\beta_m]} + C'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}\, y^{\{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\dots\beta_m)\}}. \end{cases}$$

Es wird daher nach Gleichung (12) unter Berücksichtigung von (15) und (14)

$$
(12\mathrm{a})\quad \begin{cases} z^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = + \dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}} \sum\limits_{\alpha_\gamma} \Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\ldots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}} \Big) \\ - \dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}} \sum\limits_{\alpha_\gamma} \Big(y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\ldots\alpha_{\gamma_m}}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} \Big) \\ + \sum\limits_{[\beta_\delta]} \Big(y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} \Big) + y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} \\ = \sum\limits_{[\beta_\delta]} \Big(y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} \Big) + y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}}. \end{cases}
$$

Nach Gleichung (5′) ist

$$
(5\mathrm{c})\quad \sum_{[\beta_\delta]} y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} + y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}} = \sum_{[\beta_\delta]} y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{[\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\ldots\beta_{\delta_m}]} + y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}}.
$$

Folglich geht (12a) über in

$$
(12\mathrm{b})\quad \begin{cases} z^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} = \Big(y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}} - y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}} \Big) \\ + y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)\}}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}} = y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]} - y^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{\{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)\}}. \end{cases}
$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt aber mit den Elementen von $G_m(Y)$ überein.

Die Koeffizientenmatrix $\big(\beta^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big)$ des Systems $G'_m(Y')$ ergibt sich demnach aus der Koeffizientenmatrix $\big(b^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}\big)$ des Systems $G_m(Y)$, wie folgt:

$$
\begin{aligned} \big(\beta^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big) &= G'_m(Y'))^{-1} \Big(\frac{d\,G'_m(Y')}{dx}\Big) = P\,G_m(Y)\Big(\frac{d\,G_m(Y)}{dx}\Big) P^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{b}^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big)\,\boldsymbol{P}^{-1}. \end{aligned}
$$

Analog wie in den vorhergehenden §§ erhalten wir neue Systeme $(F_{i\varkappa})$, wenn wir die Elemente von $G_m(Y)$ durch ihre Abgeleiteten ersetzen und die Determinanten der Systeme nicht verschwinden, oder wenn wir dieselben durch $|G_{m_1}(Y)|$ dividieren. Das Koeffizientensystem $\big(b^{*[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big)$ von $\Big(\dfrac{G_m(Y)}{|G_{m_1}(Y)|}\Big)$ ergibt sich aus dem Koeffizientensystem $\big(b^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big)$ durch die Gleichung

$$
\big(\boldsymbol{b}^{*[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big) = \big(\boldsymbol{b}^{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\ldots\beta_m]}\big) - \frac{\boldsymbol{m_1\lambda_1}}{\boldsymbol{n}}\Big(\sum_{\gamma=1}^{n}\boldsymbol{a}_{\gamma\gamma}\Big)
$$

$$
\Big(\lambda_1 = n^{m_1} - \binom{n+m_1-1}{m_1} - \binom{n}{m_1}\Big).
$$

Wir haben bei unserer Herleitung der Operationn $G_m(Y)$ eine ganz spezielle gerade und ungerade Permutation, nämlich $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)$ und $\{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\}$ bevorzugt; an Stelle dieser könnten wir auch jede andere gerade bzw. ungerade Permutation treten lassen, wodurch die Operation $G_m(Y)$ in eine ähnliche $QG_m(Y)Q^{-1}$ überginge.

§ 7.

Systeme derselben Art.

Es sei wieder $(Y) = (y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Systems

(A) $$\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}).$$

Eine Integralmatrix $(z_{i\varkappa}) = (Z)$ heißt alsdann mit $(y_{i\varkappa})$ von derselben Art, wenn zwischen beiden die Relation besteht

(1) $$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

worin $(r_{i\varkappa}) = (R)$ eine Matrix bedeutet, deren Elemente Funktionen aus demselben Rationalitätsbereiche R sind wie die Elemente $a_{i\varkappa}$ der Koeffizientenmatrix des Systems (A). Befriedigt jetzt $(z_{i\varkappa})$ das Differentialsystem

(B) $$\left(\frac{dz_{i\varkappa}}{dx}\right) = (z_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}),$$

so sagen wir auch, daß die Differentialsysteme (A) und (B) von derselben Art sind.[1])

Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

I. Haben wir zwei Matrices (Z_1) und (Z_2), deren Elemente rationale Funktionen der $y_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind, und die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllen:

1. *ihre Determinanten verschwinden nicht,*
2. *bei einer linearen homogenen Transformation der $y_{i\varkappa}$ mit konstanten Koeffizienten von nicht verschwindender Determinante transformieren sich die Matrices ebenfalls linear und homogen mit konstanten Koeffizienten und zwar kogredient, derart, daß die Transformationsdeterminante $\neq 0$ ist,*

alsdann befriedigen diese Integralmatrices zwei Differentialsysteme derselben Art.

---

1) L. Schlesinger, Vorl. über lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1908, S. 104—105.

Denn geht (Z_1) in $(D)(Z_1)$, desgleichen (Z_2) in $(D)(Z_2)$ über, wenn sich (Y) in $(C)(Y)$ transformiert, so bleibt die Matrix $(Z_2)^{-1}(Z_1)$ bei dieser Transformation ungeändert; sie ist daher, da $|(Z_2)^{-1}(Z_1)| \neq 0$ ist, ein System $F_{i\varkappa}$ des § 1, d. h. die Elemente dieser Matrix sind nach Satz § 1, I rationale Funktionen der $a_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten. Es besteht daher die Relation

$$(Z_2)^{-1}(Z_1) = (r_{i\varkappa})$$

oder

$$(Z_1) = (Z_2)(r_{i\varkappa}), \quad \text{q. e. d.}$$

Wir beweisen weiterhin den Satz

II. Ist (Z_1) irgend eine Matrix, deren Elemente rationale Funktionen der $y_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind und erfüllt die Matrix (Z_1) die folgenden Bedingungen

1. *ihre Determinante ist $\neq 0$,*
2. *bei einer linearen homogenen Transformation der $y_{i\varkappa}$ mit konstanten Koeffizienten von nicht verschwindender Determinante transformiert sie sich ebenfalls linear homogen mit konstanten Koeffizienten derart, daß ihre Transformationsdeterminante nicht verschwindet,*

ist ferner (Z_2) eine Matrix, die mit (Z_1) durch die Relation $(Z_2) = (C)(Z_1)(F)$ verknüpft ist, wo (C) und (F) Matrices mit konstanten Elementen nicht verschwindender Determinante bedeuten, so befriedigen (Z_1) und (Z_2) zwei Differentialgleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrices rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind, und die Systeme derselben Art sind. Dabei entsprechen sich $(C)(Z_1)$ und (Z_2) als zugehörige Integralmatrices von derselben Art.

In Folge der Voraussetzung (vgl. § 1, II) ist (Z_1) ein Integralsystem eines Differentialgleichungssystems, dem mithin auch $(C)(Z_1)$ genügt, wenn (C), wie verlangt, eine Matrix von konstanten Elementen nicht verschwindender Determinante bedeutet. Wir bezeichnen die Matrix $(C)(Z_1)$ auch mit (U). Dann besteht die Relation

$$(Z_2) = (U)(F);$$

diese ist aber, sofern wir alle Konstanten als unserem Rationalitätsbereiche angehörig ansehen, was wir im folgenden stets tun wollen, charakteristisch dafür, daß die zwei linearen homogenen Differentialgleichungssysteme, denen (U) und (Z_2) genügen, von derselben Art sind. Hieraus folgt die Richtigkeit unseres Satzes.

Im besonderen besitzt die Matrix (Y) selbst die Eigenschaften der Matrix (Z_1), woraus speziell der Satz folgt:

II$_1$. *Besteht zwischen den beiden Matrices (Z) und (Y), von denen die letztere das Differentialsystem (A) befriedigt, die Beziehung (Z) = (C)(Y)(F), wo (C) und (F) Matrices mit konstanten Elementen nicht verschwindender Determinante sind, so sind die Differentialgleichungssysteme, denen die beiden Matrices genügen, von derselben Art. (C)(Y) und (Z) sind einander als Integralsysteme derselben Art zugeordnet.*

Hieraus folgt im besonderen:

III. *Ist (Z_1) irgend eine Matrix des Grades n, deren Elemente rationale Funktionen der $y_{i\varkappa}$ und ihrer Abgeleiteten sind, und die die beiden Eigenschaften 1. und 2. des Satzes II erfüllt, ist ferner (Z_2) eine Matrix desselben Grades, die sich von (Z_1) nur dadurch unterscheidet daß in ihr die Zeilen und Kolonnen in anderer Reihenfolge angeordnet sind, so befriedigen (Z_1) und (Z_2) zwei Differentialgleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrices rationale Differentialfunktionen der Elemente $a_{i\varkappa}$ sind. Diese Differentialgleichungssysteme sind von derselben Art.*

Denn unterscheiden sich (Z_1) und (Z_2) nur dadurch, daß in ihnen die Zeilen $i_1, i_2, \ldots i_r$ mit den entsprechenden $i_1', i_2', \ldots i_r'$, desgleichen die Kolonnen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_s$ mit den entsprechenden $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa_s'$ vertauscht sind, so können dieselben ineinander übergeführt werden, indem man (Z_1) links mit der Matrix (C)

$$(C)\begin{cases} c_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa}\,(i \neq i_1, i_2, \cdots i_r;\ i_1', i_2', \cdots i_r') \\ c_{i\varkappa} = \delta_{i \pm (i_\mu - i_\mu'), \varkappa} \left(\begin{matrix} i = i_\mu' \\ i = i_\mu \end{matrix}\ \mu = 1, 2, \cdots r\right) \end{cases}$$

und rechts mit der Matrix (F)

$$(F)\begin{cases} f_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa}\,(\varkappa \neq \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_s;\ \varkappa_1', \varkappa_2', \cdots \varkappa_s') \\ f_{i\varkappa} = \delta_{i, \varkappa \pm (\varkappa_\mu - \varkappa_\mu')} \left(\begin{matrix} \varkappa = \varkappa_\mu' \\ \varkappa = \varkappa_\mu \end{matrix}\ \mu = 1, 2, \cdots s\right) \end{cases}$$

komponiert. Es ist also

$$(Z_2) = (C)\,(Z_1)\,(F),$$

wo (C) und (F) nach dem Obigen Matrices mit konstanten Elementen nicht verschwindender Determinante bedeuten, da der absolute Betrag von $|C|$ und $|F|$ gleich 1 ist. Es folgt daher der obige Satz aus Satz II.

Wendet man die eben erhaltenen Resultate auf die in § 2—6 behandelten Systeme an, so ergibt sich aus Satz I und § 2

IV. *Ersetzt man in einer Matrix $(Y) = (y_{i\varkappa})$, deren Elemente einem linearen homogenen Differentialgleichungssystem mit Koeffizienten $(a_{i\varkappa})$ genügen, die Elemente jeder Kolonne durch ihre $k_\varkappa^{ten}$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots n)$ Derivierten, wobei $k_1, k_2, \cdots k_n$ beliebige, aber fest gewählte ganze positive*

Zahlen (einschließlich Null) bedeuten, so befriedigen alle diese unendlich vielen Systeme, soweit ihre Determinanten nicht verschwinden, Differentialgleichungssysteme derselben Ordnung n, deren Koeffizientenmatrices rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind, und die zu derselben Art gehören.

Analog zu § 4 finden wir

V. *Bildet man sich die $(n^m)^2$ Funktionen*

$$X^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}} = \frac{d^{k_{\beta_1}} y_{\alpha_1 \beta_1}}{dx^{k_{\beta_1}}} \cdot \frac{d^{k_{\beta_2}} y_{\alpha_2 \beta_2}}{dx^{k_{\beta_2}}} \cdots \frac{d^{k_{\beta_m}} y_{\alpha_m \beta_m}}{dx^{k_{\beta_m}}},$$

wobei $k_{\beta_1}, k_{\beta_2}, \cdots k_{\beta_m}$ m von den n beliebigen, aber fest gewählten ganzen Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_n$ sind und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$, sowie $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$, jede der Zahlen $1, 2, \cdots n$ bedeuten, ist ferner $(Y) = (y_{i\varkappa})$ ein Fundamentalsystem von Integralen eines linearen, homogenen Differentialgleichungssystems mit Koeffizienten $(a_{i\varkappa})$, und ordnet man diese $(n^m)^2$ Funktionen in beliebiger, aber fest gewählter Reihenfolge jeweils in einer Matrix $\Pi_m(Y^{(k_\varkappa)})$ an, so daß derselben Zeile bzw. Kolonne stets derselbe Term $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ bzw. $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ entspricht, so genügen diese unendlich vielen Matrices $\Pi_m(Y^{(k_\varkappa)})$, sofern ihre Determinanten von Null verschieden sind, Differentialgleichungssystemen derselben Ordnung n^m, deren Koeffizientenmatrices rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind, und die zu derselben Art gehören.[1])

Analog zu § 5 findet man:

VI. *Bilden wir uns die Operation $P_m(Y^{(k_\varkappa)})$ der Ordnung $\binom{n+m-1}{m}$, deren Elemente*

$$Y^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}} = \sum_{\beta} X^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}}$$

sind, worin die Größen $X^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}}$ die in Satz V angegebene Bedeutung besitzen, und $\sum\limits_{\beta}$ sich über sämtliche $C_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}$ Permutationen der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ erstreckt, so genügen die den ganzen positiven Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_n$ entsprechenden Systeme $P_m(Y^{(k_\varkappa)})$, soweit ihre Determinanten nicht verschwinden, Differentialgleichungssystemen der Ordnung $\binom{n+m-1}{m}$, deren Koeffizientenmatrices rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind, und die sämtlich zu derselben Art gehören.

---

1) Vergl. hierzu A. Loewy, Transactions of the American Math. Society vol. 5, p. 78—80 (1904).

Analog zu § 3 folgt der Satz

VII. *Bildet man sich die* $\binom{n}{m}^2$ *Funktionen*

$$T^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}} = \sum_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} \varepsilon_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} \, Y^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}},$$

wo die Summation sich auf sämtliche $m!$ Permutationen der untereinander verschiedenen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ bezieht und $\varepsilon_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = \pm 1$ ist, je nachdem der Term $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ eine gerade oder ungerade Permutation darstellt, und ordnet diese Funktionen jeweils in einer Matrix $C_m(Y^{(k_\varkappa)})$ an, so genügen alle den verschiedenen Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_n$ entsprechenden Systeme, deren Determinanten nicht verschwinden, Differentialgleichungssystemen mit Koeffizientenmatrices, deren Elemente rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind; diese gehören sämtlich zu derselben Art.

Analog zu § 6 erhält man

VIII. *Bildet man sich die* $\lambda^2 = \left\{ n^m - \binom{n+m-1}{m} - \binom{n}{m} \right\}^2$ *Funktionen*

$$U^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}} = X^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m] \\ [\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]}} - X^{k_{\beta_1} k_{\beta_2} \cdots k_{\beta_m}}_{\substack{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m] \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}},$$

worin die Terme $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]$, $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]$ und $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ die in § 6, Gleichung (1) gegebene Bedeutung haben, so erhält man das System $G_m(Y^{(k_\varkappa)})$.

Alle den verschiedenen ganzen positiven Zahlen $k_1, k_2, \cdots k_n$ entsprechenden Systeme, deren Determinante $\neq 0$ ist, genügen Differentialgleichungssystemen der Ordnung λ mit Koeffizientenmatrices, deren Elemente rationale Differentialfunktionen der $a_{i\varkappa}$ sind; diese gehören sämtlich zu derselben Art.

Reduzibilität.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Zusammenhang der Operationen $\Pi_m(Y)$ mit $P_m(Y)$, $C_m(Y)$ und $G_m(Y)$ darzutun.

Wir bestimmen zunächst eine Matrix S von nicht verschwindender Determinante mit rationalen numerischen Koeffizienten, so daß die zu $\Pi_m(Y)$ ähnliche Matrix $S\,\Pi_m(Y)\,S^{-1}$ gleich der zerfallenden Matrix

$$\begin{pmatrix} P_m(Y) & 0 & 0 \\ 0 & C_m(Y) & 0 \\ 0 & 0 & G'_m(Y') \end{pmatrix}$$

wird, woraus sich dann Schlüsse auf die Reduzibilität des Differentialgleichungssystems, dem $\Pi_m(Y)$ genügt, ziehen lassen werden.

Bezeichnet man die $P_m(Y)$ bzw. $C_m(Y)$ entsprechenden Zeilen der Matrix $S = (s^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m})$ mit $(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ und $\{\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$ (vgl. § 6), so sollen die numerischen Zahlenkoeffizienten lauten:

(1)

a)[1] $s^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = 0$, *wenn* $(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m) \nsim \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$,

$s^{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = \dfrac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}}$, *wenn* $(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m) \sim \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$,

vgl. die Angaben auf Seite 29.

b)[1] $s^{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = 0$, *wenn* $\{\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m\} \nsim \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$,

$s^{\{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m\}}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = \pm 1$, *je nachdem* $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$ *eine gerade oder ungerade Permutation von* $(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ *ist*,

Wir setzen schließlich analog zu Seite 34:

c) $s^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = 0$, *wenn* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] \nsim \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$,

$s^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{\{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m)\}} = -1$, *wenn* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] = (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m)$ *bzw.* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] = \{\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m\}$,

$s^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} = 0$, *wenn* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] = [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m]$, *aber* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] \not\equiv [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m]$,

$s^{[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m]}_{[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m]} = 1$, *wenn* $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m] \equiv [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m]$.

Die Matrix (S) hat eine nicht verschwindende Determinante, wie sich aus der Existenz der inversen Matrix $(S)^{-1} = (\sigma^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m})$ ergibt. Es folgt aus

$$(S)(S)^{-1} = (\delta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m}), \quad \begin{pmatrix} \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = 0; & \alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m \not\equiv \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m \\ \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = 1; & \alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m \equiv \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m \end{pmatrix}$$

daß

$$\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m} s^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m}\ \sigma^{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m = 1, 2, \cdots n)$$

ist, oder unter Berücksichtigung von a), b) und c), da

$$s^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m} = 0, \text{ wenn } \alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m \nsim \lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_m$$

ist,

(2) $$\sum_{\alpha_\gamma} s^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\alpha_{\gamma_1} \alpha_{\gamma_2} \cdots \alpha_{\gamma_m}}\ \sigma^{\alpha_{\gamma_1} \alpha_{\gamma_2} \cdots \alpha_{\gamma_m}}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m},$$

---

1) A. Loewy: a. a. O. Seite 66—73.

wo $\sum\limits_{\alpha_\gamma}$ sich über sämtliche $C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}$ Permutationen von $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m$ zu erstrecken hat. Aus (2) folgt durch Einsetzen der Werte von (1) unmittelbar

$$
\text{(1a)}\left\{
\begin{array}{ll}
\alpha) & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)} = 0, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \nsim (\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m) \\
 & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)} = 1, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \sim (\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m) \\
\beta) & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}} = 0, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \nsim \{\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m\} \\
 & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}} = \pm\dfrac{1}{C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}}, \text{ je nachdem } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \text{ eine gerade oder ungerade Permutation von } (\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m), \\
\gamma) & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 0, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \neq [\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m], \\
 & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = -\dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}}, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m = [\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m], \text{ aber } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \not\equiv [\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m], \\
 & \sigma^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = 1 - \dfrac{1}{C'_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}}, \text{ wenn } \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_m \equiv [\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m].
\end{array}
\right.
$$

Mit Hilfe dieser Matrices verwandelt sich, wie leicht hieraus zu beweisen und aus der Arbeit von Herrn Loewy (a. a. O.) hervorgeht,

$$
S\Pi_m(Y)S^{-1} \text{ in } \begin{pmatrix} P_m(Y) & 0 & 0 \\ 0 & C_m(Y) & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.
$$

Wir haben also bloß noch die Zeilen $[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$ der Matrix $S\Pi_m(Y)S^{-1}$ zu untersuchen, deren Glieder wir mit $z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}$ bezeichnen wollen. Es wird nun nach c) und α), β), γ)

$$
\text{(2)}\quad
\begin{aligned}
z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} &= \sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\ \sum_{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda'_m} s^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}\, y^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m}_{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda'_m}\, \sigma^{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda'_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m} \\
&\qquad (\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m;\lambda_1',\lambda_2',\cdots\lambda'_m = 1, 2, \cdots n) \\
&= \sum_{\alpha_\gamma}\sum_{\beta_\delta} s^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}\, y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\, \sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m},
\end{aligned}
$$

wo $\sum\limits_{\alpha_\gamma}$ und im Falle γ) auch $\sum\limits_{\beta_\delta}$ sich über sämtliche Permutationen $\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m} = [\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]$ bzw. $\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m} = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$, im Falle α) und β) aber $\sum\limits_{\beta_\delta}$ über alle Terme $\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m} \sim \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ erstreckt; wir wollen die letztere Summation durch $\sum\limits_{\beta_\delta}{}'$ andeuten.

1. Berechnung der Glieder $z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)}:(B_{31})$.

Aus c) und α) folgt nach (2) unter Benutzung von § 6, (5c)

$$z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)} = \sum_{\alpha_\gamma}\sum_{\beta_\delta}{}' s^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}\, y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\, \sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)}$$

$$= \sum_{\beta_\delta}{}'\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right) = 0.$$

2. Berechnung der Glieder $z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}}:(B_{32})$.

Aus c) und β) folgt nach (2)

$$z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}} = \sum_{\alpha_\gamma}\sum_{\beta_\delta}{}' s^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}\, y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\, \sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}}$$

$$= \sum_{\beta_\delta}{}'\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right)\sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{\{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m\}}$$

$$= \sum_{\text{ger.}\,\beta_\delta}\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right) - \sum_{\text{unger.}\,\beta_\delta}\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right) = 0.$$

Das letztere folgt wieder nach § 6, (5c). $\sum\limits_{\text{ger.}\,\beta_\delta}$ bzw. $\sum\limits_{\text{unger.}\,\beta_\delta}$ bedeutet, daß sich die Summation über sämtliche geraden bzw. ungeraden Permutationen zu erstrecken hat.

3. Berechnung der Größen $z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$: (B_{33})

Aus c) und γ) folgt analog nach (2) und § 6, (5)

$$z^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} = \sum_{\alpha_\gamma}\sum_{\beta_\delta} s^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}\, y^{\alpha_{\gamma_1}\alpha_{\gamma_2}\cdots\alpha_{\gamma_m}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\, \sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$$

$$= \sum_{\beta_\delta}\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right)\sigma^{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}$$

$$= -\frac{1}{C'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_m}}\left(\sum_{\beta_\delta} y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{\beta_{\delta_1}\beta_{\delta_2}\cdots\beta_{\delta_m}}\right)$$

$$+\left(y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}\right) = y^{[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m]}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]} - y^{\{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)\}}_{[\beta_1\beta_2\cdots\beta_m]}.$$

Diese Elemente stimmen aber genau mit den in § 6, (1a) für $G'_m(Y')$ gegebenen überein. Daraus folgt

$$(S)\,\Pi_m(Y)\,(S)^{-1} = \begin{pmatrix} P_m(Y) & 0 & 0 \\ 0 & C_m(Y) & 0 \\ 0 & 0 & G'_m(Y') \end{pmatrix}.$$

Nun haben wir in § 6 gezeigt, daß

$$G'_m(Y') = (P)\,G_m(Y)\,(P)^{-1}$$

ist, wo (P) die dort angegebene Matrix nicht verschwindender Determinante bedeutet.

Setzen wir also

$$(T) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} (S),$$

wo E_1 und E_2 Einheitsmatrices mit so vielen Zeilen sind, als $P_m(Y)$ und $C_m(Y)$ haben, so wird

$$(T)\,\Pi_m(Y)(T)^{-1} = \begin{pmatrix} P_m(Y) & 0 & 0 \\ 0 & C_m(Y) & 0 \\ 0 & 0 & G_m(Y) \end{pmatrix}.$$

Wir haben mithin eine Matrix (T) mit numerischen Zahlen und nicht verschwindender Determinante derart angegeben, daß durch Transformation mit derselben die Matrix $\Pi_m(Y)$ in das zerlegbare System

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P_m(Y)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C_m(Y)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G_m(Y)} \end{pmatrix}$$

übergeführt wird, das also durch Aneinanderreihen der Operationen $P_m(Y)$, $C_m(Y)$ und $G_m(Y)$ entsteht.[1])

Da aber Differentialgleichungssysteme mit zueinander ähnlichen Integralmatrices nach Satz II von derselben Art sind, so folgt weiter der Satz:

Unter den Differentialgleichungssystemen, die mit demjenigen von derselben Art sind, welches die in Satz V (S. 52) aufgestellte Integralmatrix $\Pi_m(Y)$ befriedigt, gibt es eines, das ein zerlegbares Differentialgleichungssystem darstellt; dieses setzt sich aus den Differentialgleichungssystemen, denen die Integralmatrices $P_m(Y)$, $C_m(Y)$ und $G_m(Y)$ genügen, zusammen.

---

1) Dieses Resultat stimmt auch mit den allgemeinen Sätzen von Herrn J. Schur, a. a. O. Einleitung überein; vgl. auch Jahrbuch über die Fortschritte der Math. Jahrg. 1906. S. 158.